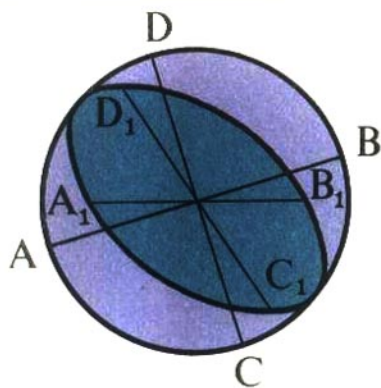


**Lecciones populares  
de matemáticas**

**REPRESENTACIÓN  
DE FIGURAS  
ESPACIALES**

**N. M. Beskin**



**Editorial MIR**



**Moscú**





ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Н. М. БЕСКИН

---

ИЗОБРАЖЕНИЕ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

---

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«НАУКА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

N. M. BESKIN

---

REPRESENTACIÓN  
DE FIGURAS ESPACIALES

---

TRADUCIDO DEL RUSO POR CARLOS VEGA,  
CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

---

EDITORIAL MIR  
MOSCU

IMPRESO EN LA URSS. 1977

*На испанском языке*

© Traducción al español. Editorial Mir. 1977

---

**INDICE**

---

**Capítulo I****Teoría**

1. Objeto de la teoría de las representaciones 7
2. Exigencias que se plantean a la representación 7
  3. De qué trata este folleto 8
  4. Método de proyecciones paralelas 8
5. Observación sobre las designaciones 10
6. Propiedades de las proyecciones paralelas 11
  7. Representaciones libres 14
  8. Representación de figuras planas 15
  9. Ejemplos de construcción de representaciones de polígonos 17
  10. Representación de la circunferencia 17
11. Otro punto de vista para la construcción de representaciones de figuras planas 19
  12. Teorema de Polke-Schwartz 22
13. Representación de figuras espaciales 28
14. Reversibilidad de la representación 30
15. Representaciones convencionales 33

**Capítulo II****Práctica**

16. Secciones de poliedros 35
17. Problemas métricos 38
18. Cuerpos redondos 40
19. Representación del plano 45
20. Figuras inscritas y circunscritas 47
21. Algunos convencionalismos del dibujo 50
22. ¿De qué depende la perceptibilidad de la representación? 51

## Capítulo III

## Método de cálculo

- 23. Teoría del método de cálculo 55
- 24. Práctica del método de cálculo 58

## Apéndice 1

Expresión de las coordenadas de los puntos  
de la representación a través de las coordenadas  
de los puntos del original

- 25. Propiedad característica  
de la función lineal homogénea 68
- 26. Fórmulas para las coordenadas  
de los puntos de la representación 70

## Apéndice 2

## Elipse

- 27. Contracción uniforme 74
  - 28. Definición de la elipse 77
  - 29. Algunas propiedades de la elipse 77
  - 30. La elipse como proyección de la circunferencia 80
  - 31. Sección del cilindro circular 82
  - 32. Algunas construcciones relacionadas con la elipse 83
- Conclusión
- 33. Recomendaciones bibliográficas 86



---

## CAPÍTULO I

---

### TEORÍA

---

1. OBJETO DE LA TEORÍA DE LAS REPRESENTACIONES. Al representar una figura plana no aparece ninguna dificultad geométrica. El dibujo resulta una copia exacta del original o bien representa una figura semejante al mismo. Cuando consideramos el dibujo de un círculo, nuestra percepción visual es la misma que al considerar el círculo original.

La situación es otra por completo cuando se trata de la representación de figuras espaciales. Desgraciadamente, no existe un «lápiz espacial» cuya punta deje huella en el aire. Tal lápiz permitiría «dibujar» un cubo auténtico trazando sus aristas. Pero como no existe, nos vemos obligados a dibujar el cubo desplazando sobre el papel la punta de un lápiz corriente. La imagen plana no puede ser copia exacta de una figura espacial. Esta discordancia plantea el problema: ¿a qué normas atenerse para construir la representación a fin de que ésta dé *la imagen más adecuada* del original? Pero, ¿qué significa «la imagen más adecuada»? Esto se aclarará en el punto siguiente.

2. EXIGENCIAS QUE SE PLANTEAN A LA REPRESENTACIÓN. Son dos: la perceptibilidad y la facilidad de medición.

La perceptibilidad significa que la representación debe ser *parecida* al original, es decir, al considerar la representación debe surgir una impresión visual semejante a la que produce el original. Señalemos que aquí se trata únicamente de la percepción de la forma geométrica del original y no del color u otras muchas propiedades que no incumben a la geometría.

La facilidad de medición es la posibilidad de encontrar fácilmente (por medio de un mínimo de construcciones geométricas y de cálculos) todas las dimensiones del original.

Estas dos exigencias son contradictorias. Por eso, la geometría descriptiva (ciencia que se ocupa de los métodos de representación de figuras espaciales en el plano) ha elaborado varios métodos diferentes que representan un compromiso entre la perceptibilidad y la facilidad de medición o que dan preferencia a una de estas exigencias ignorando la otra. La selección del método depende de los fines que se persiguen al construir la representación.

En pintura importa sólo la perceptibilidad, mientras que la facilidad de medición no tiene importancia. La persona que contempla un cuadro debe comprender directamente (sin construcción ni cálculo de ningún género) lo que ha expresado el pintor. Para ello no necesita preparación matemática alguna.

Otra cosa es el dibujo industrial. Si a un obrero se le entrega para su elaboración el dibujo de una pieza, lo que importa es la facilidad de medición y no la perceptibilidad. Existen métodos de representación nada perceptibles. Al considerar un dibujo construido por este método, una persona profana no comprenderá lo que en él se representa: para ello es necesaria una preparación especial. Pero un experto fácilmente determinará todas las dimensiones del original.

3. DE QUÉ TRATA ESTE FOLLETO. De modo que en la geometría descriptiva existen muchos métodos diferentes elaborados con fines distintos. Si se exponen todos, resultará un libro voluminoso. Por eso sólo expondremos uno. Primero explicaremos lo que quisiéramos enseñar al lector.

Queremos que el lector aprenda a hacer los dibujos que se presentan en el curso de estereometría (tanto al estudiar la teoría como al resolver los problemas).

Durante el estudio de la estereometría, todo alumno necesariamente hace dibujos, pero los hace «arbitrariamente». Como regla, el alumno imita ciertos modelos: los dibujos del manual o los que el profesor hace en la pizarra. En este folleto se expondrá la teoría geométrica que sirve de base para la construcción de los dibujos en la estereometría. Después de estudiar esta teoría, el lector podrá realizar los dibujos conscientemente, o sea, comprendiendo por qué hay que realizarlos precisamente así. Además, no estará sujeto a la necesidad de repetir constantemente los escasos modelos y podrá variarlos.

En el primer capítulo se expone la teoría; en el segundo, las aplicaciones (cómo representar el cubo, el cono, la esfera, etc.) y en el tercero, un método especial que permite marcar puntos en la representación a partir de las coordenadas de los mismos.

4. MÉTODO DE PROYECCIONES PARALELAS. Si es preciso garantizar la perceptibilidad, siempre se emplean métodos de proyección. Los más sencillos son el método de proyecciones centrales y el método de proyecciones paralelas.

El método de proyecciones centrales se ve claramente en la fig. 1. Se toma un punto fijo  $S$  (CENTRO DE PROYECCIONES) y un plano fijo  $\pi$  (PLANO DE PROYECCIONES) que no pasa por  $S$ . Por cualquier punto  $A'$  del espacio se traza la recta  $SA'$  (RECTA PROYECTANTE). El punto  $A$  de intersección de esta recta con el plano  $\pi$  se denomina proyección del punto  $A'$ . En la fig. 1 se muestran las proyecciones de dos puntos  $A'$  y  $B'$ . Después de

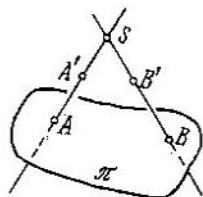


FIG. 1

obtener las proyecciones de todos o de algunos puntos del original, el dibujo obtenido se transforma de modo semejante y entonces se obtiene la REPRESENTACIÓN.

El método de proyecciones centrales ofrece las representaciones más perceptibles porque la construcción descrita reproduce el proceso visual. La fig. 2 muestra que los rayos que llegan a la retina desde los puntos del original ( $A', B', \dots$ ) o desde sus proyecciones ( $A, B, \dots$ ) son los mismos. De esta forma, da lo mismo considerar el original que su representación sobre el plano  $\pi$ <sup>1)</sup>.

Los pintores emplean exclusivamente el método de proyecciones centrales.

EL MÉTODO DE PROYECCIONES PARALELAS. Difiere del método de proyecciones centrales solamente en que las rectas proyectantes son paralelas a una dirección fija (fig. 3) y no pasan ya por un punto fijo.

Las representaciones obtenidas por el método de proyecciones paralelas son menos perceptibles porque no son tan parecidas al proceso visual. Sin embargo, son suficientemente perceptibles: es fácil reconocer el original. La explicación está en que los rayos visuales se hacen casi paralelos cuando el ojo se aleja indefinida-

<sup>1)</sup> Simplificamos un tanto la situación ya que el original se contempla con ambos ojos.

mente del original. La representación obtenida por proyección paralela recuerda un objeto de pequeñas dimensiones considerado desde lejos.

El método de proyecciones paralelas es considerablemente más sencillo que el de proyecciones centrales. Por eso siempre se emplea para construir los dibujos en la literatura didáctica y científica.

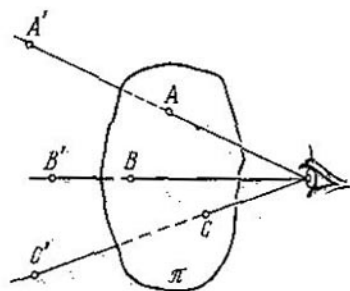


FIG. 2

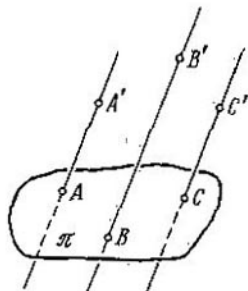


FIG. 3

5. OBSERVACIÓN SOBRE LAS DESIGNACIONES. Cuando en la estereometría hacemos un dibujo, siempre tratamos con la representación y nunca con el original. El profesor hace un dibujo lineal en la pizarra y dice: «Esto es un cubo». Pero lo que aparece en la pizarra de hecho es la representación del cubo. ¿Y dónde está el cubo? Se encuentra en un lugar por encima de las cabezas de los alumnos (fig. 4). Por sus vértices pasan las rectas proyectantes que cortan la pizarra en los puntos marcados por el profesor.

En la geometría hay una sola rama que tiene que ver con el original: la geometría descriptiva. Estudia las relaciones entre el original y su representación.

Puesto que el original aparece tan raramente, se acepta designar todos los elementos del original por letras provistas de virgula y los elementos correspondientes de la representación, por las mismas letras sin virgula. Por ejemplo,

el punto  $A'$  tiene como representación el punto  $A$ ,

la recta  $m'$  tiene como representación la recta  $m$ . Si aceptásemos

lo contrario, en la estereometría tendríamos que poner vírgula a todas las letras de los dibujos.

En el dibujo de la fig. 1 y en los dibujos sucesivos el plano viene representado de forma inusitada (con bordes irregulares y no en forma de paralelogramo); esto se explicará más tarde: el punto 19 estará dedicado íntegramente a esta cuestión.

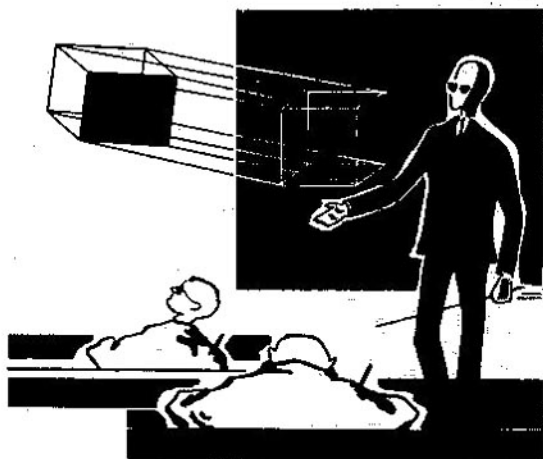


FIG. 4

6. PROPIEDADES DE LAS PROYECCIONES PARALELAS. Por el método de proyecciones paralelas, la representación se obtiene en dos pasos:

1. Todos los puntos del original se proyectan sobre el plano de proyecciones según la dirección dada  $m$  (DIRECCIÓN DE LA PROYECCIÓN).

2. La figura obtenida en el plano de proyecciones se transforma de modo semejante.

Lo que se obtiene después de realizar estos dos pasos se denomina REPRESENTACIÓN. De esta forma, ningún punto de la representación es, como regla, la proyección directa del punto correspondiente del original.

El segundo paso tiene por finalidad dar al dibujo las dimensiones adecuadas. No afecta la forma de la figura obtenida. Por supuesto, en algunos casos puede no aparecer siquiera.

Los puntos del original que se encuentran sobre una misma recta proyectante se denominan **PUNTOS CONCURRENTES**. Los puntos concurrentes tienen la misma representación.

Indiquemos las propiedades principales de las proyecciones paralelas.

**PROPIEDAD 1.** *La representación de una línea recta es una recta o un punto.*

Supongamos que la recta  $a'$  no es proyectante. Tomemos en la misma unos puntos  $A', B', C', \dots$  y tracemos por ellos las rectas proyectantes (fig. 5). Estas rectas se encuentran en un plano (que pasa por  $a'$  y que es paralelo a  $m$ ). La intersección de este plano con el plano  $\pi$  es una recta <sup>1)</sup>.

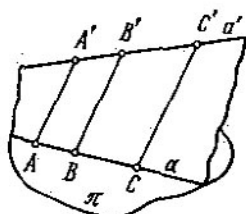


FIG. 5

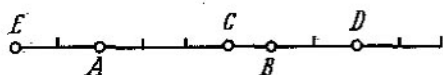


FIG. 6

Señalemos que el plano paralelo a la dirección de la proyección  $m$ , se denomina **PLANO PROYECTANTE**.

Si la recta  $a'$  es proyectante, todos sus puntos tienen una misma representación, o sea, toda la recta se representa por un punto.

**PROPIEDAD 2.** *Rectas paralelas se representan por rectas paralelas (coincidentes, en particular) o por un punto cada una.*

Supongamos que las rectas paralelas  $a', b', c', \dots$  no son proyectantes. Los planos proyectantes  $\alpha', \beta', \gamma', \dots$  que pasan por estas rectas son paralelos (o posiblemente coinciden) y, por

<sup>1)</sup> No haremos cada vez mención del segundo paso (transformación de semejanza). Está claro que no cambia nada.

consiguiente, cortan el plano  $\pi$  según rectas paralelas (coincidentes, en particular).

En cambio, si las rectas paralelas son proyectantes, se representan por puntos aislados.

*PROPIEDAD 3. La razón en que un punto de un segmento divide a éste es la misma en el original y en la representación<sup>11</sup>.*

Sea  $B'$  un punto del segmento  $A'C'$ . Las rectas  $A'A$ ,  $B'B$  y  $C'C$  son paralelas (fig. 5), de donde resulta que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Si los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  pertenecen a una misma recta proyectante, los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  coinciden. En este caso, la razón  $\frac{AB}{BC}$  toma una forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ . Pero como puede considerarse que  $\frac{0}{0}$  es igual a un número cualquiera, también en este caso puede darse por válida la proporción demostrada.

De la propiedad 3 se deduce, en particular, que *el punto medio de un segmento se representa por el punto medio*.

*OBSERVACIÓN 1.* El hecho de que  $B'$  sea un punto interior del segmento  $A'C'$  no tiene importancia. Si  $B'$  está en la recta  $A'C'$  fuera del segmento  $A'C'$ , también en este caso puede aceptarse que divide dicho segmento  $A'C'$  en la razón  $\frac{A'B'}{B'C'}$ ; pero habrá que considerar negativa esta razón. Con este acuerdo, cualquier punto de la recta  $A'C'$  divide el segmento  $A'C'$  idénticamente en la representación y en el original. Por ejemplo, los puntos  $C$ ,  $D$  y  $E$  dividen el segmento  $AB$  de la fig. 6 en las razones siguientes:

$$(ABC) = 3, (ABD) = -3 \text{ y } (ABE) = -\frac{1}{3}.$$

*OBSERVACIÓN 2.* Las propiedades de las figuras que se conservan por efecto de una transformación geométrica se denominan INVARIANTES respecto a esta transformación. Todos los parámetros de las figuras que se conservan se denominan INVARIANTES de la transformación dada.

<sup>11</sup> Esta razón se denomina RAZÓN DE TRES PUNTOS DE UNA RECTA y se designa por  $(PQR)$ , donde  $R$  es el punto que divide el segmento  $PQ$ :  $(PQR) = \frac{PR}{RQ}$ .

La proyección paralela es una transformación por cuyo efecto toda figura  $F'$  se convierte en una figura  $F$  (su proyección).

Las tres proposiciones demostradas establecen que la rectitud (propiedad de la línea) y el paralelismo (propiedad de un par de rectas) son propiedades invariantes respecto a la proyección paralela, mientras que la razón de tres puntos de una recta es un invariante de la proyección paralela.

Esto es cierto tanto para la proyección directa como para la construcción de representaciones por el método de proyecciones paralelas (véase la llamada al pie de la pág. 12).

7. REPRESENTACIONES LIBRES. En la construcción de las representaciones hay que distinguir dos planteamientos del problema.

PRIMER PLANTEAMIENTO. Está dado el original. Supongamos, para concretar, que se trata de un cubo cuya arista es igual a 1 m. Están dados todos los parámetros de la proyección: por ejemplo, la dirección de la proyección  $m$  es paralela a una diagonal del cubo y forma con el plano de proyecciones  $\pi$  el ángulo  $\alpha = 60^\circ$ ; la proyección obtenida se somete a una transformación de semejanza cuyo coeficiente es  $k = 0,02$ . Construir la representación.

EL SEGUNDO PLANTEAMIENTO difiere del primero en que no se conocen los parámetros de la proyección. El problema se plantea así: construir la representación de un cubo. Pese a la aparente sencillez de este enunciado, es necesario aclarar detalladamente en qué consiste.

Cuando en la estereometría dibujamos un cubo, nos es indiferente la posición del original respecto al papel o a la pizarra. Sólo necesitamos estar seguros de que la figura dibujada puede servir como representación de algún cubo.

Explicemos esto de una forma algo distinta. Supongamos que el profesor ha dibujado de *cualquier modo* un cubo en la pizarra (fig. 4). ¿Es posible colocar después de esto en el espacio un cubo de modo que su proyección sobre la pizarra según cierta dirección coincida con la figura dibujada? Si no es posible, la figura dibujada no puede ser representación de ningún cubo. Tal dibujo debe ser considerado *incorrecto* o *erróneo*. Un dibujo incorrecto no puede ser perceptible.

Pero si existe un cubo original correspondiente a la figura trazada, el dibujo está hecho *correctamente*. La corrección es una condición necesaria, pero no suficiente, de la perceptibilidad. La perceptibilidad requiere el cumplimiento de otras dos condiciones de las que se tratará en el punto 22.



La representación que se obtiene sin tomar en consideración la posición del original respecto al dibujo se denomina REPRESENTACIÓN LIBRE. En la estereometría, en las ilustraciones y en la mayoría de las aplicaciones técnicas se emplean representaciones libres. Siempre dibujamos *algún* cubo o *alguna* esfera. Por ello, *en este folleto se consideran representaciones libres exclusivamente.*

Para que la representación libre sea correcta, es necesario construirla ateniéndose a determinadas reglas. Y nuestro objetivo consiste precisamente en explicar estas reglas.

8. REPRESENTACIÓN DE FIGURAS PLANAS. Se trata de representar en el plano del dibujo las figuras que se encuentran en otro plano. Al realizar la representación pueden deformarse. Con frecuencia en la estereometría es preciso representar figuras espaciales que contienen distintos elementos planos. Por ejemplo, al representar un poliedro, representamos sus distintas caras en un mismo plano del dibujo.

La teoría de la representación de figuras planas se basa en los dos teoremas siguientes.

TEOREMA 1. *Cualquier triángulo dado puede ser representado por un triángulo arbitrario.*

ACLARACIÓN. Supongamos, por ejemplo, que se pide representar el triángulo  $A'B'C'$  con  $\alpha A' = 60^\circ$ ,  $A'B' = 3$  m y  $A'C' = 2$  m. Podemos dibujar un triángulo  $ABC$  cualquiera y afirmar que él es la representación del triángulo  $A'B'C'$ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos dos triángulos: el original  $A'B'C'$  y el triángulo  $ABC$ . Tracemos por el lado  $A'B'$  un plano  $\pi$  distinto del plano  $A'B'C'$  (fig. 7). Construyamos en el plano  $\pi$  sobre el lado  $A'B'$  el triángulo  $A'B'C_1$  semejante al triángulo  $ABC$  (hay dos triángulos así; tomemos uno cualquiera de ellos). Tomemos  $m \equiv C'C_1$  como la dirección de la proyección. Entonces la proyección del triángulo  $A'B'C'$  sobre el plano  $\pi$  será el triángulo  $A'B'C_1$ . Deformándolo de modo semejante, obtendremos el triángulo  $ABC$ .

TEOREMA 2. *Si está dada la representación del triángulo  $A'B'C'$ , queda definida con ello unívocamente la representación de cada punto que pertenece al plano de este triángulo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A'B'C'$  el original y sea  $ABC$  la representación (fig. 8). Tomemos en el plano del triángulo  $A'B'C'$  un punto arbitrario  $D'$  y unámoslo con un vértice cualquiera del triángulo, por ejemplo, con  $A'$ . Sea  $E'$  el punto de intersección de  $A'D'$  y del lado opuesto  $B'C'$  (no importa si  $E'$  está dentro del segmento

$B'C'$  o en su prolongación). Puede suceder que  $A'D'$  sea paralelo a  $B'C'$ . Supongamos por ahora que  $A'D'$  no es paralelo a  $B'C'$ . Podemos encontrar la representación  $E$  del punto  $E'$ : debe dividir el segmento  $BC$  en la misma razón que  $E'$  divide el segmento  $B'C'$ , o sea,

$$\frac{BE}{EC} = \frac{B'E'}{E'C'}$$

El punto  $D$  debe estar en la recta  $AE$ . Su posición en esta recta

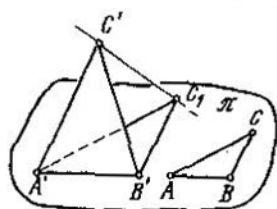


FIG. 7

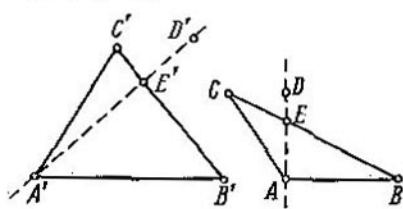


FIG. 8

se determina a partir de la proporción

$$\frac{AD}{DE} = \frac{A'D'}{D'E'}$$

En cambio, si  $A'D' \parallel B'C'$ , entonces  $AD \parallel BC$  y

$$\frac{AD}{BC} = \frac{A'D'}{B'C'}$$

De los dos teoremas demostrados se deduce la regla práctica para la construcción de las representaciones de figuras planas. Cuando comenzamos a dibujar la representación de una figura plana  $F'$ , podemos proceder hasta cierto momento de un modo arbitrario. Pero llega el momento en que toda la arbitrariedad se agota y ya nada puede hacerse por libre elección en el dibujo: todo debe ser construido. Los dos teoremas que acabamos de demostrar permiten captar este momento peligroso: hay que escoger en la figura  $F'$  tres puntos cualesquiera en posición general (o sea, no pertenecientes a una misma recta) y representarlos por tres puntos arbitrarios en posición general. Con esto termina la arbitrariedad: las representaciones de todos los demás puntos deben

ser construidas. En otras palabras, podemos representar arbitrariamente un triángulo dado, pero un cuadrilátero dado ya no podemos.

#### 9. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DE REPRESENTACIONES DE POLÍGONOS. EJEMPLO 1. *Construir la representación de un cuadrado.*

Notemos que un paralelogramo debe ser representado por un paralelogramo. Por otra parte, cualquier paralelogramo dado (un cuadrado, en particular) puede representarse por un paralelogramo cualquiera. En efecto, dentro del paralelogramo  $A'B'C'D'$  podemos destacar el triángulo  $A'B'C'$  y representarlo por un triángulo arbitrario  $ABC$ . Después habrá que completarlo hasta formar un paralelogramo. Es decir, para representar un cuadrado, hay que dibujar un paralelogramo arbitrario.

#### EJEMPLO 2. *Representar un hexágono regular.*

La construcción de la representación de cualquier figura plana puede realizarse en tres etapas.

PRIMERA ETAPA. Imaginarse el original o dibujarlo en su forma natural (sin deformarlo).

SEGUNDA ETAPA. Destacar en el original un triángulo y representarlo por un triángulo cualquiera.

TERCERA ETAPA. Construir sucesivamente los demás elementos de la figura empleando sus relaciones con los ya dibujados. Pero (¡atención! esto es lo más importante) no se permite emplear cualquier relación, sino sólo las invariantes respecto a la proyección paralela. Por ejemplo, si dos rectas del original son perpendiculares, esta propiedad no puede traspasarse a la representación; pero sí puede traspasarse cuando son paralelas.

Resolvamos ahora el problema planteado. En la fig. 9, *a* aparece un hexágono regular  $A'B'C'D'E'F'$  en su forma natural (primera etapa). Representemos arbitrariamente el triángulo  $A'B'C'$  (segunda etapa; fig. 9, *b*). El punto  $G'$  es el punto medio del segmento  $A'B'$ . Esta propiedad es invariante y, por consiguiente, el punto  $G$  debe ser el punto medio del segmento  $AC$ . Ahora podemos trazar la recta  $BG$ . En ésta pueden construirse los puntos  $O$  y  $E$  empleando las relaciones invariantes  $B'O' = 2B'G'$  y  $B'E' = 4B'G'$ . Ahora  $C'D' \parallel B'G'$  y  $A'F' \parallel B'G'$ . El punto  $D$  puede encontrarse por distintos procedimientos: 1) construyendo  $CD = BO$ , 2) trazando  $ED \parallel AB$  o 3) trazando la recta  $AO$ . Análogamente se construye el punto  $F$ .

#### 10. REPRESENTACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA. EJEMPLO 3. *Construir la representación de una circunferencia.*

ACLARACIÓN 1. La representación de la circunferencia es la elipse<sup>1)</sup>.

ACLARACIÓN 2. La curva se construye a base de puntos. Para construir la circunferencia existe un instrumento, el compás. Es un caso excepcional (pero no único: existen instrumentos que permiten construir arcos de algunas otras curvas). Por eso, el problema «construir la elipse» debe comprenderse así: indicar un procedimiento que permita obtener tantos puntos de la elipse como se quiera.

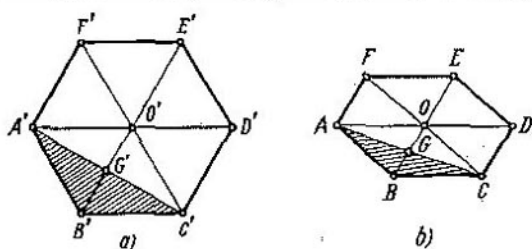


FIG. 9

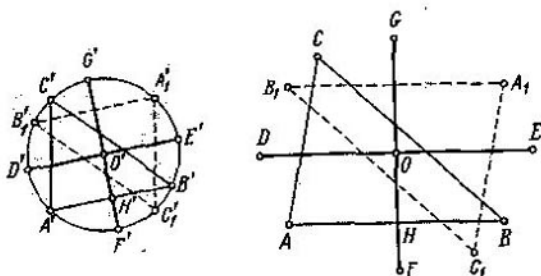


FIG. 10

La construcción de la elipse empleando los diámetros conjugados se da en el punto 32. Aquí consideraremos un problema más próximo a nuestro tema: *construir la circunferencia si tres puntos de la misma están representados arbitrariamente*. En otras palabras: *representar la circunferencia circunscrita a un triángulo*.

En la fig. 10 a la izquierda se muestra el original: la circunferencia y el triángulo  $A'B'C'$  inscrito en ella. Representemos el

<sup>1)</sup> Si el lector no está familiarizado con la elipse, puede encontrar la información necesaria en el Apéndice 2 (pág. 74).

triángulo  $A'B'C'$  por un triángulo arbitrario  $ABC$  (fig. 10, a la derecha) y construyamos el punto  $O$  que representa el centro de la circunferencia (su construcción se ha omitido).

Si en el original construimos para cada vértice del triángulo el punto simétrico respecto al centro  $O'$ , obtendremos un triángulo nuevo  $A_1B_1C_1$  simétrico a  $A'B'C'$ . Sus vértices se encuentran sobre la misma circunferencia. Es fácil obtener la representación del triángulo  $A_1B_1C_1$ : hay que construir los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  simétricos, respectivamente, a  $A$ ,  $B$  y  $C$  respecto al punto  $O$ . Así obtendremos otros tres puntos pertenecientes a la representación de la circunferencia.

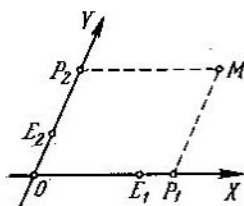


FIG. 11

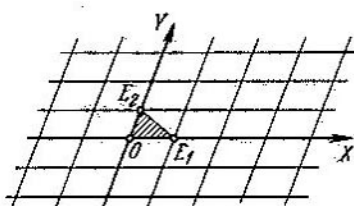


FIG. 12

Las rectas simétricas respecto al centro son paralelas. Por consiguiente,  $A'B' \parallel A_1B_1$ . Tracemos por el punto  $O'$  dos diámetros:  $D'E' \parallel A'B'$  y  $F'G' \perp A'B'$ . Es fácil construir la representación de estas rectas:  $DE \parallel AB$  y  $FG$  pasa por los puntos medios de los segmentos  $AB$  y  $A_1B_1$ . Los extremos  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $G$  se determinan de las proporciones

$$\frac{OD}{AB} = \frac{O'D'}{A'B'} \quad \text{y} \quad \frac{OF}{OH} = \frac{O'F'}{O'H'}$$

( $H'$  es el punto de intersección de  $F'G'$  y  $A'B'$ ;  $H$  es el punto medio de  $AB$ ).

De esta forma hemos construido dos diámetros conjugados  $DE$  y  $FG$  de la elipse que representan dos diámetros perpendiculares  $D'E'$  y  $F'G'$  de la circunferencia. A partir de los diámetros conjugados puede construirse la elipse (véase el punto 32).

11. OTRO PUNTO DE VISTA EN LA CONSTRUCCIÓN DE REPRESENTACIONES DE FIGURAS PLANAS. Todo punto puede construirse a partir de las coordenadas, pero para ello es necesario escoger primero el sistema de coordenadas.

UN SISTEMA AFÍN DE COORDENADAS (en el plano) consta de los elementos siguientes (fig. 11):

1) Dos rectas secantes; designaremos el punto de intersección por  $O$ .

2) En cada recta se escoge una dirección positiva; se ha marcado con una flecha.

Toda recta en la que se ha escogido una dirección (de las dos posibles) se denomina RECTA ORIENTADA ó EJE. Por eso, los puntos 1) y 2) se pueden sustituir por uno: dos ejes secantes.

3) Se señala el orden de los ejes.

Esto significa que se señala cuál de los ejes es el primero y cuál es el segundo. Para indicar el orden podemos designar los ejes por las letras  $X$  e  $Y$  o por las cifras 1 y 2, o bien trazar uno con lápiz negro y el otro con lápiz rojo, o bien... Bueno, sería difícil indicar todos los modos. Lo único que importa es poder distinguir los ejes.

4) En cada eje se da LA UNIDAD DE MEDIDA. Esto se logra indicando los puntos unidad  $E_1$  y  $E_2$ .

Después de introducir un sistema afín de coordenadas, todo punto  $M$  del plano puede determinarse por LAS COORDENADAS AFINES. Trazamos por  $M$  las rectas  $MP_2$  y  $MP_1$  paralelas a los ejes  $X$  e  $Y$  respectivamente. Los números

$$x = \frac{OP_1}{OE_1} \quad \text{e} \quad y = \frac{OP_2}{OE_2}$$

provistos de signos  $+$  o  $-$  según la regla conocida se denominan coordenadas afines del punto  $M$ . Subrayemos que las coordenadas son números abstractos (sin dimensión) y no segmentos.

Si los ejes  $X$  e  $Y$  son perpendiculares y las unidades de medida son iguales, o sea,

$$\sphericalangle XOY = 90^\circ \quad \text{y} \quad OE_1 = OE_2,$$

el sistema de coordenadas se denomina SISTEMA CARTESIANO y las coordenadas  $x$  e  $y$ , COORDENADAS CARTESIANAS.

El sistema de coordenadas determina la así llamada red de coordenadas (fig. 12). El plano queda dividido en paralelogramos iguales mediante líneas paralelas a los ejes  $X$  e  $Y$ . Los lados de los paralelogramos son las unidades de medida de los ejes  $X$  e  $Y$ .

Si se toma en el plano un punto  $M$ , sus coordenadas se deducen claramente de la posición que ocupa en la red. Nos abstraemos aquí de la dificultad técnica que surge cuando el punto  $M$  no es UN NUDO de la red (o sea, un vértice de un paralelogramo)

y sus coordenadas deben estimarse a ojo. Para facilitar esta estimación puede trazarse un mayor número de rectas (por ejemplo, a cada décima parte de la unidad de medida).

La representación de la red de coordenadas es una red de coordenadas análoga formada por paralelogramos iguales. Sólo varían los parámetros de estos paralelogramos: las longitudes de los lados y el ángulo.

La representación de la red de coordenadas determina la representación de cualquier punto del plano. Todo punto  $M'$  se representa por un punto  $M$  que tiene la misma posición en su red de coordenadas que el punto  $M'$  respecto a la suya. En otras

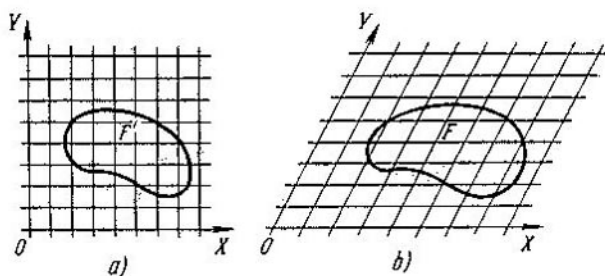


FIG. 13

palabras, el punto  $M$  (la representación) tiene las mismas coordenadas que el punto  $M'$  (el original) pero las coordenadas del punto  $M'$  se determinan respecto a la red natural de coordenadas (así suele denominarse el sistema original), mientras que las coordenadas del punto  $M$  se determinan respecto a la representación del sistema natural.

En la fig. 13, *a* aparece la figura  $F'$  colocada sobre una red (cartesiana) de coordenadas. En la fig. 13, *b* se da la representación arbitraria del sistema de coordenadas (o sea, de la red de coordenadas) y se muestra la representación de la figura  $F$ .

En los puntos anteriores hemos hablado de que al construir la representación de una figura plana puede darse *arbitrariamente* la representación de un triángulo; para todo lo demás queda *eliminada la arbitrariedad*. Este punto lleva el título de «Otro punto de vista...». En él se afirma que la representación del sistema de coordenadas puede hacerse a voluntad.

Si el lector analiza atentamente la fig. 11, descubrirá una verdad muy importante: *un triángulo con vértices individualizados*

(o sea, designados por letras o cifras, o bien especificados de algún otro modo) es precisamente un sistema afin de coordenadas. En la fig. 12 se ha destacado el triángulo  $OE_1E_2$ . Está claro que determina la red de coordenadas. Si los puntos  $O$ ,  $E_1$  y  $E_2$  están marcados, es fácil construir a partir de ellos la red de coordenadas.

12. TEOREMA DE POLKE-SCHWARTZ. Sabemos que en la representación de figuras planas el triángulo desempeña un papel especial. Aparte de conocer este hecho, comprendemos su profunda motivación que consiste en que el triángulo (con los vértices

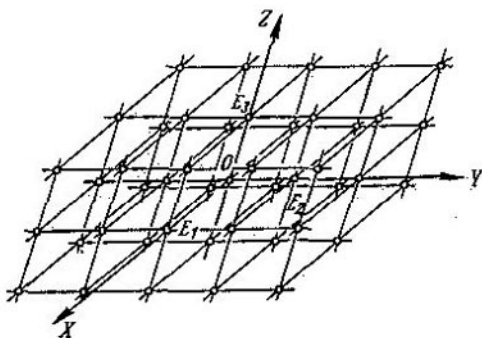


FIG. 14

individualizados) representa el sistema de coordenadas, es el embrión de la red de coordenadas. Si se borra casi todo en la fig. 12 dejando sólo los tres puntos  $O$ ,  $E_1$  y  $E_2$ , se puede reconstruir todo el dibujo a partir de estos tres puntos.

Quien haya comprendido esto deducirá con plena seguridad que el tetraedro debe desempeñar un papel especial semejante en la representación de figuras espaciales.

¿Por qué pensamos así? Porque el tetraedro con vértices individualizados representa el sistema afin de coordenadas en el espacio. (No explicamos qué es un sistema afin de coordenadas en el espacio; el lector debe comprenderlo por analogía con el sistema plano.) El tetraedro es el embrión de la red espacial de coordenadas. Si de todos los elementos de la red se conservan únicamente los puntos  $O$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  (fig. 14), es posible reconstruir la red a partir de ellos.



Estas consideraciones nos conducen a la hipótesis siguiente (teorema de Polke-Schwartz<sup>1)</sup>):

TEOREMA 3. *Cualquier tetraedro dado puede ser representado por un cuadrilátero completo arbitrario.*

OBSERVACIÓN 1. Se denomina cuadrilátero completo al cuadrilátero con las diagonales. Hablando con más rigor, se trata de una figura plana compuesta por los elementos siguientes: cuatro puntos en posición general (o sea, no hay tres entre ellos que estén en una misma recta) y seis segmentos que unen estos puntos de dos en dos.

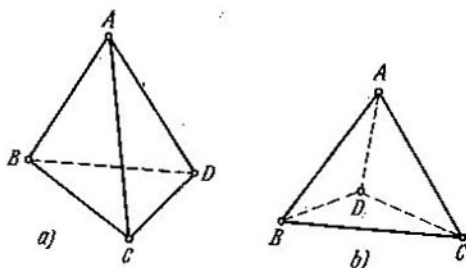


FIG. 15

El cuadrilátero del que trata el teorema no es necesariamente convexo. En la fig. 15, *a* el tetraedro  $A'B'C'D'$  está representado por un cuadrilátero convexo  $ABCD$  con las diagonales  $AC$  y  $BD$ . Este mismo tetraedro está representado en la fig. 15, *b* por un cuadrilátero no convexo  $ABCD$  (dibújelo aparte, sin las diagonales) con las diagonales  $AC$  y  $BD$ .

OBSERVACIÓN 2. No piense que los segmentos de trazos son las diagonales. Las líneas de trazos se emplean para indicar las líneas invisibles (se supone que las caras del tetraedro no son transparentes). Cualquiera que sea la posición de los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se considera que los segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  son los lados del cuadrilátero  $ABCD$  y que los segmentos  $AC$  y  $BD$  son las diagonales.

OBSERVACIÓN 3. No olvide que el teorema 3 no es por ahora más que una conjetura. Pero más tarde lo demostraremos. Por eso lo hemos denominado de antemano teorema.

<sup>1)</sup> Polke demostró este teorema en 1853 para el caso de un tetraedro rectángulo equilátero (con aristas laterales iguales y con ángulos planos rectos en el vértice). En 1864 Schwartz lo demostró para el caso de un tetraedro arbitrario.

Ahora, después de haber enunciado el teorema y haber dado en las observaciones el antidoto para posibles confusiones, habría que pasar a su demostración. Pero aplacemos un poco la demostración: a veces las meditaciones sobre el significado del teorema permiten, mejor que la demostración, penetrar en la esencia del problema.

Entre los teoremas 1 y 3, pese a su semejanza, existe una diferencia profunda. En el teorema 1 el original es un triángulo y la representación es un triángulo, o sea, un sistema plano de coordenadas se representa por otro sistema plano de coordenadas. En cambio, en el teorema 3 el original es un tetraedro y la representación es un cuadrilátero completo, o sea, el original y la representación son figuras de distinta índole, una espacial y la otra plana.

Existe otra diferencia importante. Cuando se representa una figura plana, todo punto del plano del dibujo es la representación de un *único* punto del plano del original. Por eso, para representar un punto del original basta indicar simplemente el punto en el dibujo. En cambio, cuando se representan figuras espaciales, todo punto del plano del dibujo es la representación de un conjunto infinito de puntos concurrentes, o sea, de toda la recta proyectante. Marcar un punto en el dibujo no significa ni mucho menos representar un punto determinado del original.

Esta dificultad se salva así. El punto  $M'$  se proyecta primero (o sea, antes de construir la representación) sobre algún plano del original a partir de un punto o paralelamente a alguna recta del mismo (esta operación se denomina PROYECCIÓN INTERNA). Designemos por  $M'_0$  el punto obtenido. Después se construyen las representaciones  $M$  y  $M_0$  de los puntos  $M'$  y  $M'_0$ . Estos dos puntos determinan la posición del punto  $M'$  en el espacio. El punto  $M_0$  se denomina SEGUNDA PROYECCIÓN (aunque mejor sería decir segunda representación) del punto  $M'$ .

Por ejemplo, la fig. 16 se ha obtenido así: el punto  $M'$  ha sido proyectado primero sobre el plano  $X'Y'$  paralelamente al eje  $Z'$ ; después todo en conjunto ha sido representado en el plano. En la fig. 16, el punto  $M$  es la representación del punto  $M'$  y  $M_0$  es su segunda representación.

En la fig. 19, *b* (véase la pág. 29) el punto  $E$  es la segunda proyección del punto  $M'$ .

Pero volvamos al teorema 3. Su demostración se basa en el lema siguiente.

LEMA. Todo prisma triangular puede ser cortado mediante un plano según un triángulo semejante a uno dado.

Se entiende por prisma triangular «un tubo triangular» infinito y no un poliedro de cinco caras. Tal prisma queda determinado por su sección normal, o sea, por la sección que se obtiene mediante un plano perpendicular a las aristas.

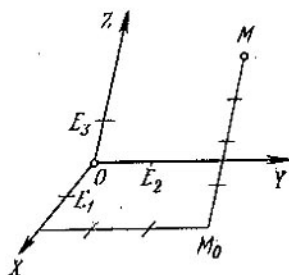


FIG. 16

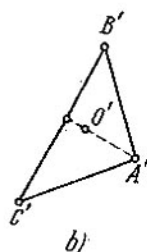
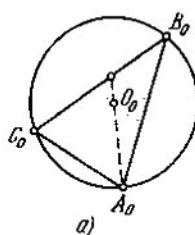


FIG. 17

Sean dados, pues, dos triángulos (fig. 17). El triángulo  $A_0B_0C_0$  es la sección normal del prisma y el triángulo  $A'B'C'$  es el modelo. Es preciso cortar el prisma con un plano de modo que la sección obtenida sea un triángulo semejante a  $A'B'C'$ .

Comencemos por el análisis del problema. Sea  $\alpha$  el plano perpendicular a las aristas del prisma y sea  $\beta$  el plano buscado. El plano  $\alpha$  corta el prisma según el triángulo  $A_0B_0C_0$  y el plano  $\beta$  lo corta según el triángulo  $A''B''C''$  que es semejante al triángulo  $A'B'C'$ .

Consideremos la proyección paralela del plano  $\alpha$  sobre el plano  $\beta$ . La dirección de la proyección es paralela a las aristas del prisma. El triángulo  $A_0B_0C_0$  se proyecta sobre el triángulo  $A''B''C''$ . Tomemos la circunferencia circunscrita al triángulo  $A_0B_0C_0$  (fig. 17). Se proyectará sobre la elipse circunscrita al triángulo  $A''B''C''$ . Las rectas que la proyectan forman un cilindro circunscrito al prisma. Sometamos a una transformación de semejanza el triángulo  $A''B''C''$  (y la elipse circunscrita) hasta convertirlo en el triángulo  $A'B'C'$ . La elipse se transformará entonces en una elipse circunscrita al triángulo  $A'B'C'$ .

El triángulo  $A'B'C'$  y la elipse circunscrita es la representación del triángulo  $A_0B_0C_0$  y de la circunferencia circunscrita ya que la primera de estas figuras se obtiene de la segunda por efecto de

una proyección paralela seguida de una transformación de semejanza. Pero en tal caso la elipse circunscrita al triángulo  $A'B'C'$  está completamente determinada e incluso puede ser construida por puntos sin dificultad (esta construcción ha sido descrita en el punto 10; véase la fig. 10). En la fig. 17, *b* se ha indicado el centro de la elipse.

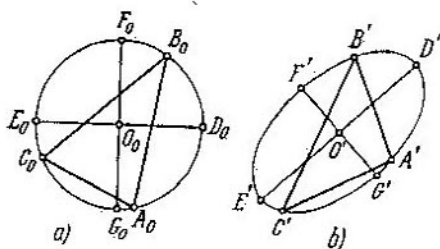


FIG. 18

Tracemos los ejes de la elipse, el eje mayor  $D'E' = 2a'$  y el eje menor  $F'G' = 2b'$  (fig. 18), y construyamos los diámetros perpendiculares  $D_0E_0$  y  $F_0G_0$  de la circunferencia correspondientes a estos ejes (o sea, los diámetros que tienen como representación los ejes de la elipse). Pasando a la construcción, mostremos cómo se puede «introducir» en el cilindro la figura (la elipse con el triángulo inscrito) semejante a la que acabamos de construir.

Si un cilindro circular se corta mediante un plano, se obtiene como sección una elipse en la que:

- 1) el eje menor es igual al diámetro de la sección normal,
- 2) la razón de los semiejes es igual al coseno del ángulo que forman los planos secante y normal (véase el punto 31).

Partiendo de ello:

- 1) tracemos en el plano  $\alpha$  alguna recta paralela a  $F_0G_0$ ;
- 2) tracemos por esta recta el plano  $\beta$  que forma el ángulo

$\varphi = \arccos \frac{b'}{a'}$  con el plano  $\alpha$ . Notemos que existen dos planos de este tipo porque el ángulo  $\varphi$  se puede construir a ambos lados del plano  $\alpha$ .

El plano  $\beta$  construido de esta forma cortará el cilindro según una elipse con la razón dada de los semiejes. Los extremos  $F''$  y  $G''$  de su eje menor están «por encima» de los puntos  $F_0$  y  $G_0$

(o sea, sobre las mismas generatrices). Los puntos  $A''$ ,  $B''$  y  $C''$  están en las mismas generatrices que los puntos  $A_0$ ,  $B_0$  y  $C_0$ . En efecto, la posición del triángulo  $A''B''C''$  respecto a la cruz ( $D''E''$ ,  $F''G''$ ) es la misma que la del triángulo  $A_0B_0C_0$  respecto a la cruz ( $D_0E_0$ ,  $F_0G_0$ ). Hablando más precisamente, el punto  $A''$  (la misma proposición es válida para los puntos  $B''$  y  $C''$ ) tiene respecto al sistema de coordenadas ( $O''D''$ ,  $O''F''$ ) las mismas coordenadas afines que tiene el punto  $A_0$  respecto al sistema de coordenadas ( $O_0D_0$ ,  $O_0F_0$ ).

Pasemos ahora a la demostración del teorema 3. Sean dados el tetraedro  $A'B'C'D'$  (el original) y el cuadrilátero plano  $A^0B^0C^0D^0$  (el modelo). La demostración se basa en la idea siguiente. El tetraedro tiene tres pares de aristas opuestas:

$A'B'$  y  $C'D'$ ,

$A'C'$  y  $B'D'$ ,

$A'D'$  y  $B'C'$ .

Las aristas opuestas del tetraedro se cruzan mientras que las rectas correspondientes que forman el cuadrilátero plano se cortan. De este modo, la figura plana tiene, hablando en términos generales, tres puntos (denominados PUNTOS DIAGONALES del cuadrilátero completo) que no posee la figura espacial. Designemos por

$P^0$  el punto de intersección de  $A^0B^0$  y  $C^0D^0$ ,

$Q^0$  el punto de intersección de  $A^0C^0$  y  $B^0D^0$ ,

$R^0$  el punto de intersección de  $A^0D^0$  y  $B^0C^0$ .

No está excluido que uno de estos puntos no aparezca (si las rectas que lo determinan resultan paralelas). Pueden no aparecer incluso dos puntos, pero jamás tres.

Resulta que los puntos diagonales determinan la dirección de la proyección. Veamos cómo sucede esto.

Determinemos en la arista  $A'B'$  el punto  $P_1$  que la divide en la misma razón en la que el punto  $P^0$  divide el segmento  $A^0B^0$  y determinemos análogamente el punto  $P_2$  en la arista  $C'D'$ :

$$\frac{A'P_1}{P_1B'} = \frac{A^0P^0}{P^0B^0} \quad \text{y} \quad \frac{C'P_2}{P_2D'} = \frac{C^0P^0}{P^0D^0}.$$

Por lo tanto, un mismo punto  $P^0$  del modelo determina dos puntos distintos  $P_1$  y  $P_2$  del original. Estos son puntos concurrentes, o sea, deben representarse por un mismo punto. Ello significa que la recta  $P_1P_2$  es una recta proyectante.

Tracemos por los vértices del tetraedro  $A'B'C'D'$  las rectas paralelas a  $P_1P_2$ . Obtendremos un prisma cuadrangular infinito. Cortando este prisma con un plano *cualquiera* (pero no proyectante) obtendremos como sección un cuadrilátero  $ABCD$  tal que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A^0P^0}{P^0B^0},$$

$$\frac{CP}{PD} = \frac{C^0P^0}{P^0D^0}.$$

Pero en lugar de un plano cualquiera tomemos aquel que corta el prisma triangular  $A'B'C'$  según el triángulo  $ABC$  semejante a  $A^0B^0C^0$ . Este plano corta el prisma cuadrangular según el cuadrilátero  $ABCD$  que tiene la siguiente semejanza con el cuadrilátero  $A^0B^0C^0D^0$  (el modelo):

el triángulo  $ABC$  es semejante al triángulo  $A^0B^0C^0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{AP}{PB} &= \frac{A^0P^0}{P^0B^0}, \\ \frac{CP}{PD} &= \frac{C^0P^0}{P^0D^0}. \end{aligned} \right\}$$

De estas condiciones se deduce que el cuadrilátero  $ABCD$  es semejante al cuadrilátero  $A^0B^0C^0D^0$  y con ello queda demostrado el teorema 3.

13. REPRESENTACIÓN DE FIGURAS ESPACIALES. TEOREMA 4. *Si se da la representación de un tetraedro  $A'B'C'D'$ , queda determinada con ello la representación de cada punto del espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $A'B'C'D'$  el original y  $ABCD$  su representación en el plano (fig. 19). Sea, además,  $M'$  un punto arbitrario del espacio. Mostremos cómo se construye su representación. Unamos  $M'$  con algún vértice del tetraedro, digamos con  $A'$ , y marquemos el punto  $E'$  de intersección de la recta  $A'M'$  con la cara opuesta  $B'C'D'$  (el punto  $E'$  no tiene que estar necesariamente dentro del triángulo  $B'C'D'$ ). Dejamos a cargo del lector la consideración del caso en el que  $A'M'$  es paralela al plano  $B'C'D'$ . Trazando las rectas  $B'E'$ ,  $C'E'$  y  $D'E'$ , obtendremos en los lados del triángulo  $B'C'D'$  los puntos  $E'_B$ ,  $E'_C$  y  $E'_D$ , respectivamente.

Paremos ahora a la representación. Podemos construir las representaciones de los puntos  $E'_B$ ,  $E'_C$  y  $E'_D$ : éstas deben dividir

los segmentos  $CD$ ,  $DB$  y  $BC$  en las mismas razones que tienen lugar en el original. En realidad, basta construir sólo dos de estos tres puntos, por ejemplo  $E_B$  y  $E_C$ . La intersección de las rectas  $BE_B$  y  $CE_C$  nos da el punto  $E$ . Ahora trazamos la recta  $AE$

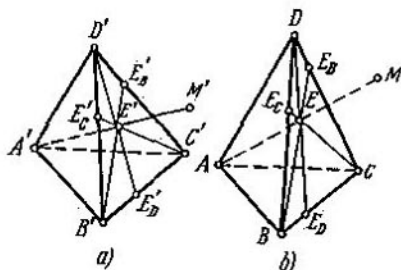


FIG. 19

y construimos en ella el punto  $M$  que satisface la condición

$$\frac{AM}{ME} = \frac{A'M'}{M'E'}$$

El teorema demostrado puede ser interpretado de esta forma: la representación de un tetraedro puede completarse hasta obtener la representación de un sistema de coordenadas espacial. En la fig. 16 se da la representación de un sistema espacial de coordenadas que se determina plenamente indicando el punto  $O$  (la representación del origen de coordenadas) y los puntos  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  (las representaciones de los puntos unidad de los ejes de coordenadas). Teniendo esta representación, puede construirse la representación de cualquier punto dado por sus coordenadas. Por ejemplo, en la fig. 16 aparece la construcción de la representación del punto  $M'$  (2, 3, 4).

#### EJEMPLO 1. Representar un cubo.

Las tres aristas del cubo que arrancan de un mismo punto determinan un tetraedro. Según el teorema de Polke-Schwartz, este tetraedro puede representarse por un cuadrilátero arbitrario. Los elementos restantes de la representación se construyen partiendo de que las aristas paralelas del cubo también deben ser paralelas en el dibujo.

De esta forma, al representar un cubo (fig. 20) podemos marcar arbitrariamente los puntos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $D_1$  y  $A_2$ . Esto es precisamente

el teorema de Polke-Schwartz. La mayoría de las personas piensan que la figura que aparece en la fig. 20 no siempre puede servir como la representación de un cubo y que es preciso escoger de un modo especial los ángulos de los paralelogramos que la componen y las relaciones entre los segmentos. Confiese cómo pensaba hasta el momento: ¿dibujaba el cubo con plena libertad o se sujetaba a un modelo determinado considerándolo obligatorio?

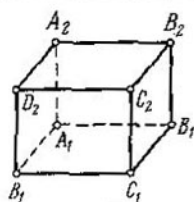


FIG. 20

La otra forma del teorema de Polke-Schwartz nos permite representar arbitrariamente el sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Por ejemplo, en la fig. 16 podemos escoger arbitrariamente los ángulos  $\alpha XOY$  y  $\alpha YOZ$  y afirmar que en el original los ejes  $X'$ ,  $Y'$  y  $Z'$  son perpendiculares dos a dos. Además, podemos escoger arbitrariamente las longitudes de los segmentos  $OE_1$ ,  $OE_2$  y  $OE_3$  y afirmar que son iguales en el original y que incluso tienen una longitud dada, por ejemplo  $O'E_1 = O'E_2 = O'E_3 = 1$  m. De este modo, al exponer el curso de geometría analítica en el espacio, el profesor puede representar en la pizarra el sistema cartesiano rectangular de coordenadas como se le antoje, sin el menor remordimiento.

**EJEMPLO 2** Representar una pirámide cuadrangular regular.

La base (el cuadrado) puede representarse por un paralelogramo arbitrario. Además, según el teorema de Polke-Schwartz, puede representarse arbitrariamente una arista lateral, o sea, escogerse al azar el vértice de la pirámide.

Si es preciso trazar la altura, hay que unir el vértice con el punto de intersección de las diagonales de la base.

**14. REVERSIBILIDAD DE LA REPRESENTACIÓN.** Hasta el momento hemos tratado de las condiciones en las que el original determina la representación. Pero para la práctica tiene mucho mayor interés



el planteamiento recíproco. Efectivamente, ¿en qué consiste el valor de la representación? Exclusivamente en que da una información acerca del original. Si un obrero debe elaborar una pieza a base de su dibujo, es necesario que éste determine plenamente la pieza. Contemplando una obra de arte, queremos imaginarnos con claridad el original<sup>1)</sup>.

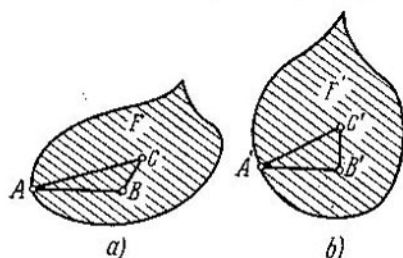


FIG. 21

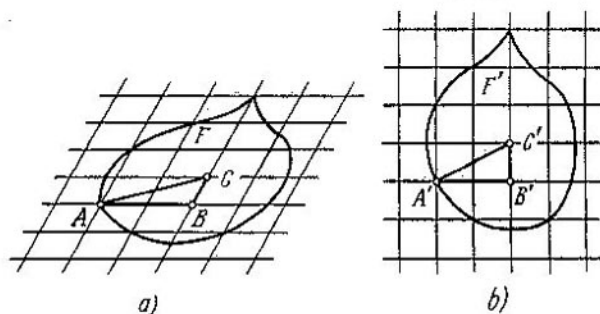


FIG. 22

Se dice que la representación es reversible, si a partir de ella puede reconstruirse el original.

Resolvamos primero el problema de la reversibilidad de la representación de una figura plana. Sea  $F$  la representación de una figura plana (fig. 21,  $a$ ). Tomemos tres puntos cualesquiera  $A$ ,  $B$  y  $C$  en posición general pertenecientes a  $F$ . Sabemos que el triángulo  $ABC$  puede representar un triángulo cualquiera. Supongamos que como complemento a la representación de la fig. 21,  $a$

<sup>1)</sup> Esperamos que los aficionados al arte abstracto no se interesen por este folleto: no necesitan de la teoría de las representaciones.

aparece la condición siguiente: en el original  $A'B' = 12,4$  mm,  $B'C' = 6,2$  mm y  $\sphericalangle A'B'C' = 90^\circ$ . Entonces podemos reconstruir exactamente el triángulo  $A'B'C'$  (fig. 21, b). Después de esto podemos construir todos los puntos de la figura  $F'$ , o sea, toda la figura  $F'$ .

Según hemos explicado ya en el punto 11, el triángulo desempeña el papel del sistema de coordenadas. En lugar de considerar el triángulo podríamos superponer sobre la representación  $F$  una red de coordenadas e indicar su reconstrucción. Comúnmente suele emplearse la red que representa una red cartesiana (aunque esto no es ni mucho menos obligatorio). En la fig. 22, a aparece la misma figura  $F$  con una red de coordenadas superpuesta. Como complemento a la fig. 22, a se dice que los paralelogramos de esta red de coordenadas representan cuadrados de lados de 6,2 mm. En la fig. 22, b se ha reconstruido la red de coordenadas natural y la figura  $F'$  sobre la misma.

Señalemos una vez más que la representación  $ABC$  de un triángulo no permite decir nada sobre el original (aparte de que es un triángulo y no otra cosa). Por eso, la reconstrucción del original debe darse adicionalmente.

Si se tiene la representación  $F$  de una figura plana (más compleja que un triángulo), entonces:

- 1) *la representación de una figura plana es irreversible, o sea, no se puede a partir de ella determinar con exactitud el original,*
- 2) *la representación se hace reversible si se da la reconstrucción de algún triángulo que forma parte de la misma.*

Más exacto resultaría decir que la representación de una figura plana es irreversible en cualquiera de los casos, pero es reversible el sistema siguiente: a) la representación y b) una condición adicional que da la reconstrucción de algún triángulo que forma parte de la representación. Teniendo a) y b) se puede determinar con exactitud el original.

Una situación análoga se tiene para las representaciones de las figuras espaciales. Teniendo la representación de un tetraedro, no se puede determinar el original. En efecto, esta representación puede referirse, según el teorema de Polke-Schwartz, a cualquier tetraedro. Por eso, la reconstrucción del tetraedro original debe darse adicionalmente. Con relación a figuras más complejas la situación es la siguiente:

- 1) *La representación de una figura espacial es irreversible.*
- 2) *Se hace reversible si se da la reconstrucción del tetraedro que corresponde a algún cuadrilátero completo que forma parte de la representación.*

15. REPRESENTACIONES CONVENCIONALES. La representación se denomina CONVENCIONAL si se complementa con ciertas condiciones. Sin estas condiciones no se puede tener una idea precisa del original.

Por ejemplo, la fig. 20 no permite decir que en ella está representado un cubo. Puede ser la representación de cualquier paralelepípedo. Pero si se dice que es un cubo, entonces es un cubo. Tenemos de esta forma la representación convencional de un cubo.

Existe el dicho anónimo de «conste que esto es un león y no un perro»<sup>1)</sup>. Se refiere a un pintor que no espera que su obra sea interpretada correctamente y le colocó al pie esta aclaración. Pero el pintor tiene razón: si debajo aparece escrito que se trata de un león, entonces el original es efectivamente un león. El pintor ha dado la representación convencional de un león.

Casi todas las representaciones, incluyendo las de arte, son convencionales. Aclaremos esto con ejemplos.

En la geometría las condiciones adicionales se enuncian explícitamente: de un modo directo se indican las dimensiones de algún tetraedro. En los dibujos industriales se indican las dimensiones y las magnitudes de los ángulos.

Quando los arquitectos representan la fachada de un edificio, suelen colocar delante imágenes de personas o automóviles. Ello viene a sustituir la escala.

En pintura, las condiciones adicionales jamás se enuncian (por esto, la inscripción «conste que esto es un león y no un perro» nos parece cómica); pero existen en forma latente: en el cuadro aparecen representados objetos que la persona reconoce sin aclaraciones especiales. Por ejemplo, si en el cuadro aparecen rieles, sabemos que son paralelos y tenemos una idea aproximada de la distancia entre los mismos<sup>2)</sup> (y por eso no es necesario indicar esta distancia con una inscripción especial). Si aparece un poste telegráfico, sabemos que es perpendicular a los rieles

<sup>1)</sup> Existe también en el folklore de otros pueblos. Por ejemplo, hablando de un pintor Don Quijote explica: «Tal vez pintaba un gallo de tal suerte y tan mal parecido, que era menester que con letras góticas escribiese junto a él: "éste es gallo"» («El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha», segunda parte, capítulo III).

<sup>2)</sup> Recordemos que en arte la representación no se construye por las leyes que se exponen en este folleto. En pintura se emplean las proyecciones centrales y no las paralelas. Por eso, los rieles en el cuadro no son paralelos.

y conocemos aproximadamente sus dimensiones, etc. Contemplando un cuadro, la persona se guía inconscientemente por estas condiciones y las emplea para reconstruir completamente el original.

Pero si el cuadro representara un paisaje de otro planeta y no apareciera en él ningún objeto familiar, sería imposible hacerse una idea exacta del original. Sin embargo, incluso en este caso ciertos momentos serían sobrentendidos. Por ejemplo, daríamos por horizontal la superficie del planeta y consideraríamos verticales las direcciones paralelas determinadas por los bordes laterales del cuadro. No podríamos juzgar acerca de las dimensiones del original. Para salvar esta dificultad habrá que pedir a los futuros pintores cosmonautas que incluyan en sus paisajes al menos un objeto terrestre.

Más arriba hemos señalado que casi todas las representaciones son convencionales. Casi todas, pero no todas. Las condiciones adicionales son indispensables si queremos tener una idea absolutamente exacta del original, pero se dan situaciones, en la estereometría en particular, en las que carece de interés conocer las propiedades métricas del original (las dimensiones y los ángulos):

Volvamos, por ejemplo, a la fig. 20. Si no aparecen condiciones adicionales, podemos decir que tenemos la representación de *algún* paralelepípedo. Si es preciso demostrar un teorema o resolver un problema, referente a un paralelepípedo arbitrario, la fig. 20 sin ninguna condición adicional puede servir de modelo.

Si se trata de un tetraedro arbitrario, puede utilizarse la fig. 15 sin condiciones adicionales. En cambio, si necesitamos representar, por ejemplo, un tetraedro regular tendremos que agregar a la fig. 15 una condición de tipo «conste que esto es un león y no un perro»: «es un tetraedro regular» o « $A'B' = A'C' = A'D' = B'C' = B'D' = C'D'$ »<sup>1)</sup>. Si es preciso indicar la dimensión, podemos agregar « $A'B' = \omega$ » o « $A'B' = 1 \text{ cm}$ ».

<sup>1)</sup> En la estereometría puede omitirse la vírgula y escribirse  $AB = AC = \dots$  como si la representación fuese directamente el tetraedro. Pero en este folleto, cuyo tema son las relaciones entre la representación y el original, nos vemos obligados a ser meticulosos.

## CAPÍTULO II

## PRÁCTICA

16. SECCIONES DE POLIEDROS. Ahora consideraremos las representaciones que suelen aparecer al estudiar la estereometría. En primer término nos ocuparemos de cuestiones en las que no interviene la métrica (o sea, la medición de segmentos y ángulos). Nos proponemos no tan sólo explicar cómo se construyen las representaciones sino analizar también las faltas que suelen cometerse.

EJEMPLO 1. Supongamos que se pide representar la sección de un prisma mediante un plano. En la fig. 23, *a* se muestra la sección de un prisma triangular. Ha sido «construida» de un modo muy sencillo: tomando unos puntos arbitrarios  $A_3$ ,  $B_3$  y  $C_3$  en las aristas del prisma y uniéndolos mediante segmentos de rectas. En la fig. 23, *b* este mismo «método» se ha empleado para construir la sección de un prisma cuadrangular.

La fig. 23, *a* es correcta mientras que la fig. 23, *b* no lo es. En la fig. 23, *b* se ha cometido un error frecuente que ahora explicaremos.

El plano se determina por tres puntos. Por eso, cuando representamos la sección plana de un prisma triangular, podemos escoger arbitrariamente los puntos en sus aristas. Pero no se puede proceder del mismo modo en el caso de un prisma cuadrangular. Si marcamos arbitrariamente los puntos  $A_3$ ,  $B_3$  y  $C_3$ , con ello definimos ya el plano secante y no podemos escoger arbitrariamente el punto de su intersección con la cuarta arista.

Pero, ¿y si se diera el caso de que la fig. 23, *b* haya resultado correcta por casualidad, o sea, de que el punto  $D_3$ , escogido al azar, haya sido tomado precisamente donde tiene que estar? Veamos cómo se puede comprobar esto.

El plano que pasa por las aristas  $A_1A_2$  y  $C_1C_2$  corta la sección plana  $A_3B_3C_3D_3$  según la diagonal  $A_3C_3$  y el plano que pasa por las aristas  $B_1B_2$  y  $D_1D_2$  la corta según la diagonal  $B_3D_3$ . La recta de intersección de estos dos planos es paralela a las aristas del prisma. Por consiguiente, los puntos de intersección de las diagonales de todas las secciones planas del prisma se encuentran sobre una recta paralela a las aristas del prisma. En la fig. 23, *b* se han marcado los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de intersección de las diagonales de las bases; la recta  $P_1P_2$  es paralela a las

aristas del prisma. El punto  $P_3$  no se encuentra sobre esta recta; por consiguiente, el dibujo no es correcto. Esto significa que el cuadrilátero  $A_3B_3C_3D_3$  representado en él no es plano. Una persona experta, por ejemplo un pintor, inmediatamente, sin realizar construcción alguna, se dará cuenta de ello.

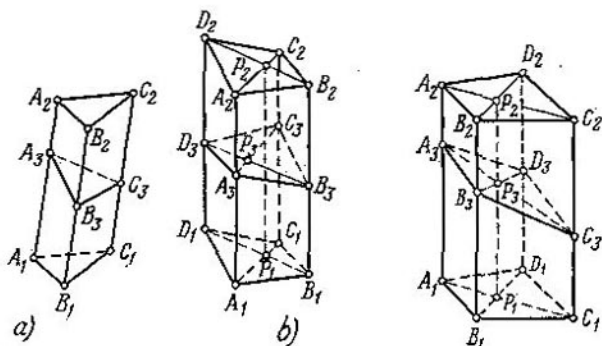


FIG. 23

FIG. 24

En lugar de los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  se podrían haber tomado los puntos de intersección de otros pares de rectas. Por ejemplo, el punto  $Q_1$  de intersección de  $A_1B_1$  y  $C_1D_1$  y los puntos análogos  $Q_2$  y  $Q_3$  deben estar sobre una recta paralela a  $A_1A_2$ . Del mismo modo el punto  $R_1$  de intersección de  $A_1D_1$  y  $B_1C_1$  y los puntos análogos  $R_2$  y  $R_3$  deben estar sobre una recta paralela a  $A_1A_2$ .

Esta propiedad permite, aparte de comprobar la justeza del dibujo, realizar la construcción de una sección plana de un prisma cuadrangular. Marcamos arbitrariamente unos puntos  $A_3$ ,  $B_3$  y  $C_3$  (fig. 24). Construimos los puntos  $P_1$  y  $P_2$  y trazamos la recta  $P_1P_2$  (resultará paralela a la recta  $A_1A_2$ ). Trazamos la recta  $A_3C_3$ . Encontramos el punto  $P_3$  de intersección de  $A_3C_3$  y  $P_1P_2$ . Trazamos  $B_3P_3$ . El punto de intersección de  $B_3P_3$  y  $D_1D_2$  es el punto buscado.

Consideremos dos ejemplos más motivando previamente la selección de los mismos. En este folleto explicamos cómo deben representarse las figuras espaciales y no cómo deben resolverse en el dibujo los problemas de construcción. El segundo tema constituye un escalón superior respecto al primero. Por eso consideraremos exclusivamente la siguiente cuestión: «construir

alguna sección plana de un poliedro». El segundo tema exige la construcción de secciones planas que satisfagan determinadas condiciones, por ejemplo: «construir la sección del poliedro correspondiente a un plano que pasa por tres puntos dados». Este problema es más complejo, especialmente si los puntos no se dan en las aristas.

La representación de secciones planas de los poliedros requiere el empleo de sólo dos reglas:

1) Si los planos  $\beta'$  y  $\gamma'$  se cortan según la recta  $l'$  y el plano  $\alpha'$  los corta según las rectas respectivas  $b'$  y  $c'$ , entonces  $b'$  y  $c'$  se cortan en un punto perteneciente a  $l'$  o son paralelas a  $l'$ .

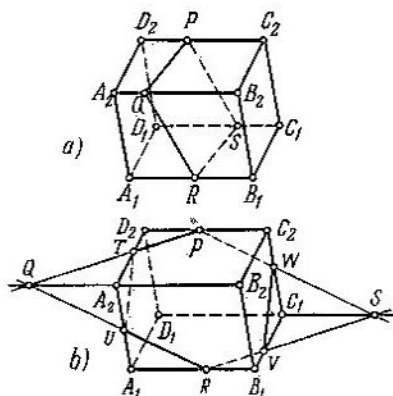


FIG. 25

2) Si los planos  $\beta'$  y  $\gamma'$  son paralelos y el plano  $\alpha'$  los corta según las rectas respectivas  $b'$  y  $c'$ , entonces  $b'$  y  $c'$  son paralelas.

EJEMPLO 2. Representar una sección plana de un paralelepípedo.

Trazamos las representaciones de las líneas  $PQ$  y  $QR$  de la sección. El punto de intersección de las mismas debe estar sobre la recta  $A_2B_2$ ; por lo demás, las rectas  $PQ$  y  $QR$  son arbitrarias. En la fig. 25, *a* el punto  $Q$  se ha tomado dentro del segmento  $A_2B_2$  (lo cual no es obligatorio). Después trazamos  $RS \parallel QP$  y  $PS \parallel QR$ . Prueba: el punto de intersección de  $RS$  y  $PS$  debe estar sobre la recta  $C_1D_1$  (pero no necesariamente dentro del segmento  $C_1D_1$ ).

En la fig. 25, *b* las rectas  $PQ$  y  $QR$  se han trazado de modo que el punto  $Q$  aparece fuera del segmento  $A_2B_2$ . Marcamos los puntos  $T \equiv PQ \times A_2D_2$  y  $U \equiv QR \times A_1A_2$  y unimos  $U$  y  $T$ .

Trazamos  $RS \parallel QP$  y  $PS \parallel QR$ . Prueba: el punto  $S$  debe estar sobre la recta  $C_1D_1$ . Si este punto queda en la prolongación del segmento  $C_1D_1$ , unimos los puntos  $V \equiv RS \times B_1C_1$  y  $W \equiv PS \times C_1C_2$ . Prueba: debe ser  $VW \parallel TU$ .

EJEMPLO 3. Representar una sección plana de una pirámide cuadrangular (fig. 26).

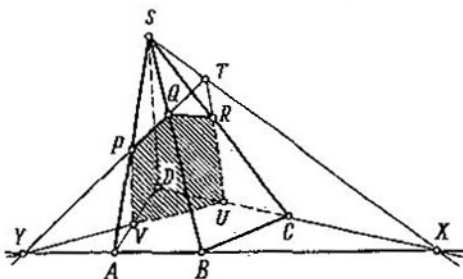


FIG. 26

Trazamos arbitrariamente las líneas  $PQ$  y  $QR$ . A partir del punto  $R$  debemos trazar la línea de sección sobre la faceta trasera. Los planos de las facetas delantera y trasera se cortan según la recta  $S'X'$ . Es fácil obtener la representación de esta recta construyendo el punto  $X \equiv AB \times CD$ . Las trazas del plano secante  $\alpha'$  sobre las caras delantera y trasera deben cortarse en  $S'X'$ . Determinamos el punto  $T \equiv PQ \times SX$  y trazamos  $TR$ . Marcamos el segmento  $RU$  de esta recta que se encuentra dentro del triángulo  $SCD$ .  $AB$  representa la línea de intersección de las facetas delantera e inferior. Por consiguiente, la traza del plano secante sobre la faceta delantera ( $P'Q'$ ) y su traza  $U'V'$ , por ahora desconocida, sobre la cara inferior deben cortarse en  $A'B'$ .

17. PROBLEMAS MÉTRICOS. EJEMPLO 1. Cortar la pirámide cuadrangular regular  $S'A'B'C'D'$  mediante un plano perpendicular a la arista  $S'A'$ .

La base de una pirámide cuadrangular regular es un cuadrado. Puede ser representado por un paralelogramo arbitrario (fig. 27). Además, según el teorema de Polke-Schwartz, se puede representar arbitrariamente una de las aristas laterales, por ejemplo,  $S'A'$ .

De esta forma quedará representado arbitrariamente el tetraedro  $S'A'B'C'$ . Pero el teorema de Polke-Schwartz afirma que se puede



representar arbitrariamente un tetraedro *dado* y en nuestro problema no está dado el tetraedro  $S'A'B'C'$  por cuanto no se da la longitud de la arista lateral (o de la altura, en su lugar). Agreguemos una condición más, por ejemplo,

$$S'T' = 2 \cdot A'B'.$$

Sólo ahora el problema resulta determinado.

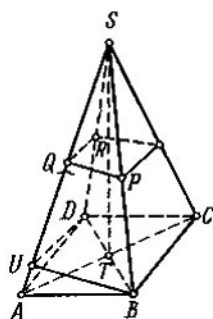


FIG. 27

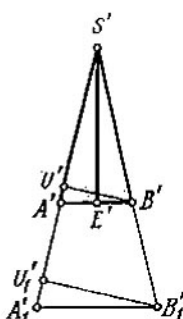


FIG. 28

En la fig. 28 el triángulo  $S'A'B'$  está representado en su forma natural, o sea, sin deformaciones. El punto  $E'$  es el punto medio de  $A'B'$ ,  $A'B' = a$  y  $S'E' = \frac{a\sqrt{17}}{2}$ . Desde el vértice  $B'$  se ha trazado la altura  $B'U'$ .

Ahora hay que pasar el punto  $U'$  a la representación. La razón  $\frac{S'U'}{U'A'}$  es invariante. Aplicamos el método de semejanza. En la fig. 28 construimos  $S'A'1 = SA$ . Transformando semejantemente todo el dibujo, obtenemos el triángulo  $S'A'1B'1$  y la altura  $B'1U'1$  del mismo. Resta pasar el tamaño  $S'U'1$  a la figura 27, o sea, tomar  $SU = S'U'1$ .

Ahora resulta que  $S'A' \perp U'B'$  y  $S'A' \perp U'D'$ . Por consiguiente,  $S'A'$  es perpendicular al plano  $B'U'D'$ . Este plano se puede trasladar paralelamente a sí mismo. Esto conduce a sustituir en la fig. 27 las representaciones  $UB$  y  $UD$  de las trazas del plano por las rectas paralelas  $PQ$  y  $QR$ . Se concluye la construcción de esta sección siguiendo las reglas expuestas en el punto 16.

OBSERVACIÓN. Si no se da la dimensión de la altura o de la arista lateral y sólo se dice que la pirámide es regular, el problema resulta indeterminado. En este caso se puede resolver el problema inverso. Trazamos  $BUD$  arbitrariamente (véase de nuevo la fig. 27) y afirmamos que  $B'U'D' \perp S'A'$ . Entonces se puede determinar la dimensión de la altura o de la arista lateral de la pirámide.

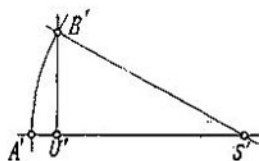


FIG. 29

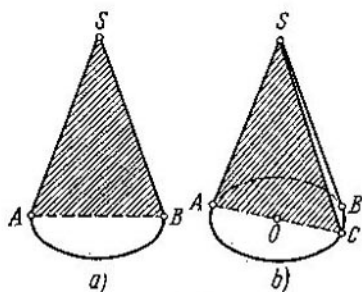


FIG. 30

Con este fin dibujamos aparte el segmento  $SA$  con el punto  $U$  (fig. 29). En la fig. 29 se ha tomado  $\frac{S'U'}{U'A'} = \frac{SU}{UA}$ ; por ejemplo, se puede tomar  $S'U' = SU$  y  $S'A' = SA$ . La recta  $BU$  de la fig. 27 no es perpendicular a  $SA$ , pero en el original (fig. 29) levantamos en  $U'$  la perpendicular a  $S'A'$ . Con centro en  $S'$  y radio igual a  $S'A'$  hacemos una marca y obtenemos el punto  $B'$ . El triángulo  $S'A'B'$  viene a ser ahora la faceta lateral de la pirámide en su forma natural (salvo una semejanza).

18. CUERPOS REDONDOS. CILINDRO. El cilindro está representado en la fig. 30. Ambas bases se representan por elipses iguales. En la fig. 30, *a* aparecen representados dos diámetros perpendi-

culares de la base superior (e inferior). Se representan mediante diámetros conjugados de la elipse.

Para mayor claridad, en la fig. 30, *b* aparece el cilindro con un corte en forma de un ángulo diedro de  $90^\circ$ .

CONO. La base del cono se representa mediante una elipse. En la práctica escolar (incluso en los manuales) con frecuencia se comete el siguiente error: las generatrices extremas se emplean

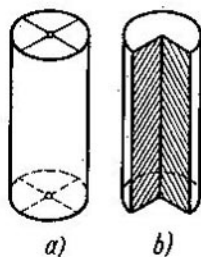


FIG. 31

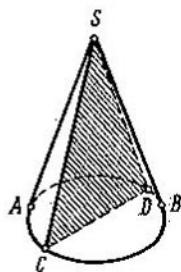


FIG. 32

para representar la sección axial y se supone, además, que son tangentes a la elipse en los extremos del eje mayor (fig. 31, *a*). Esto es un absurdo. Si desde el punto *S* trazamos las tangentes a la elipse y unimos los puntos de tangencia *A* y *B*, la recta *AB* no pasará por el centro de la elipse. Sin embargo, algunos «delineantes» la hacen pasar por el centro. La fig. 31, *b* es la correcta. Uno de los puntos de tangencia, digamos *A*, se une con el centro *O* y en la elipse se marca el punto *C* diametralmente opuesto a *A*. El triángulo *SAC* es la representación de la sección axial.

La fig. 31, *b* muestra claramente que vemos algo más de la mitad de la superficie lateral del cono. Es interesante conocer desde dónde mira el observador si ve el cono tal como aparece en la fig. 31, *b*. Desde muy lejos por encima del plano de la base (los rayos que llegan a la retina forman con el plano de la base unos ángulos de  $30^\circ$  aproximadamente).

Para representar la sección axial no es necesario ni mucho menos emplear una de las generatrices del contorno. Se pueden emplear dos cualesquiera generatrices diametralmente opuestas. En la fig. 32 se da otra variante de la representación del cono con la sección axial.

ESFERA. Comencemos por una observación práctica: se acostumbra representar la esfera mediante la proyección ortogonal. La razón de ello es la siguiente. Al proyectar la esfera, las rectas proyectantes forman un cilindro circular tangente a la esfera (fig. 33). El plano  $\alpha'$  es perpendicular a las generatrices del cilindro y el plano  $\beta'$

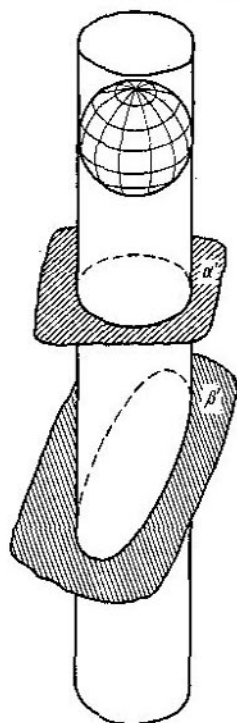


FIG. 33

no lo es; el plano  $\alpha'$  corta el cilindro según un círculo y el plano  $\beta'$ , según una elipse oblonga, o sea, la proyección de la esfera sobre  $\alpha'$  es un círculo y sobre  $\beta'$ , una elipse oblonga.

La representación de la esfera en la que su contorno es una elipse oblonga no resulta perceptible. La mayoría de las personas dirá que «no se parece a una esfera». Por eso, cuando se proyecta la esfera, se acostumbra emplear el plano  $\alpha'$  y no el plano  $\beta'$ .

¿Podría darse el caso de que una representación construida correctamente no resultara perceptible? Sí, como puede verse de este ejemplo. La corrección es una condición necesaria, pero no suficiente, de la perceptibilidad. Acerca de las condiciones suficientes se tratará en el punto 22.

En los manuales aparece a veces una representación errónea de la esfera (fig. 34). Para abreviar la exposición emplearemos los términos geográficos «ecuador», «meridiano», «polo Norte», «polo Sur», como si se tratase del globo terráqueo.

En la fig. 34 el ecuador está representado por una elipse cuya porción inferior corresponde a la parte visible del ecuador. Esto significa que los rayos proyectantes están inclinados respecto al

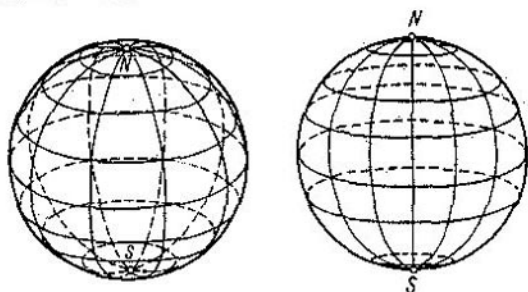


FIG. 34

FIG. 35

plano del ecuador y lo cortan de arriba a abajo (considerando que arrancan del ojo del observador). Pero entonces las representaciones de los polos no pueden aparecer en el contorno. El polo Norte está más abajo (o sea, vemos el polo y parte de sus inmediaciones) mientras que el polo Sur se encuentra en la parte trasera, invisible, de la esfera (fig. 35).

Si partimos de que los polos se hallan en el contorno, de ello resulta que los rayos proyectantes son paralelos al plano del ecuador. Entonces el ecuador debe estar representado por un segmento (fig. 36).

La representación correcta de la esfera se construye del modo siguiente: El ecuador y los meridianos se representan mediante elipses, con la particularidad de que todos los meridianos han de pasar por los puntos *N* y *S*. Resta sólo poner en claro la relación que existe entre la representación del ecuador y la posición de los puntos *N* y *S*.

Si la elipse que representa el ecuador se estrecha, hasta convertirse en un segmento, los puntos  $N$  y  $S$  se encuentran en el contorno. Si la elipse se ensancha, los puntos  $N$  y  $S$  se aproximan. *Cuanto más ancha sea la elipse, tanto más bajo estará  $N$  (y más alto  $S$ ).* Ahora precisaremos esta idea.

Imaginémonos el original. Tracemos la sección ecuatorial (el círculo  $A'B'C'D'$ ) y el diámetro  $N'S'$  perpendicular a la misma («el eje de la Tierra»). Imaginémonos, además, un plano que es perpendicular a  $A'C'$  y que (por cuestiones de comodidad) no

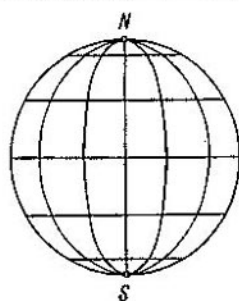


FIG. 36

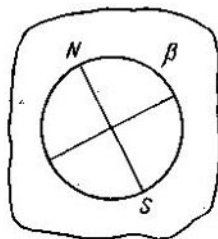
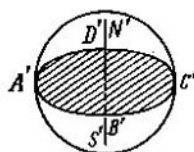


FIG. 37

corta la esfera (fig. 37). Proyectemos ortogonalmente sobre el plano  $\beta'$  la esfera, la sección ecuatorial y el eje  $N'S'$ . La esfera se proyecta en un círculo y el sistema  $(A'B'C'D', N'S')$ , en dos diámetros perpendiculares de este círculo.

Si hacemos girar la figura de la izquierda (fig. 37) alrededor de  $A'C'$ , el círculo del plano  $\beta'$  conservará su posición y la cruz formada por sus dos diámetros perpendiculares girará alrededor del centro.

La fig. 38 es la clave del problema sobre la relación entre la representación del ecuador y las representaciones de los polos. El diámetro  $PQ$  determina el eje menor de la elipse y el diámetro  $NS$ , la posición de los polos  $N$  y  $S$ . Este dibujo no necesita aclaración para que lo comprenda el lector. Empleando este dibujo, se pueden resolver los dos problemas siguientes:

1) Se da la representación del ecuador en forma de una elipse. Hallar los polos.

2) Se dan los polos. Construir la representación del ecuador.

Después de haber representado el ecuador y los polos, es fácil trazar la red de coordenadas (los meridianos y los paralelos)

sobre la esfera (fig. 35). Los meridianos se representan mediante elipses que pasan por los puntos *N* y *S*. Los círculos paralelos se representan mediante elipses semejantes tangentes al contorno. Omitimos los detalles (la construcción de los ejes de todas las elipses); el lector los puede construir a ojo.

Por supuesto, cuando se representa una esfera, no es necesario ni mucho menos mostrar la red de coordenadas en ella. Puede suceder que el original esté «limpio», o sea, que no haya nada dibujado en su superficie. En tal caso la representación de la esfera se reducirá solamente a un círculo (el contorno). Carecerá de

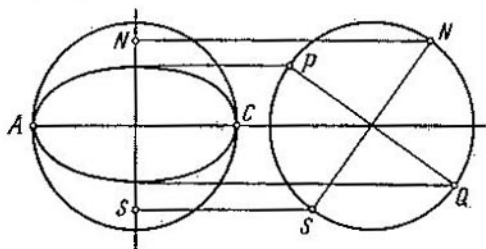


FIG. 38

expresividad y será imposible adivinar que es la representación de una esfera. Para que la representación exprese la convexidad de la esfera, habrá que hacer algún dibujo en su superficie (la red de coordenadas, por ejemplo) o SOMBREAR la representación. La construcción de las sombras es uno de los temas de la geometría descriptiva. En este folleto no lo tocaremos.

19. REPRESENTACIÓN DEL PLANO. Representando métricamente un original dado, damos los primeros pasos de manera arbitraria. Pero cada paso nos limita en cierto grado y cada vez es menor la arbitrariedad. Finalmente queda agotada (cuando hemos representado algún tetraedro que forma parte del original) y todos los elementos restantes de la representación deben ser construidos.

Es una costumbre extendida representar en los manuales el plano (más exactamente, «un pedazo del plano») mediante un paralelogramo. Se supone que el original es un pedazo *rectangular* del plano.

Representando un pedazo rectangular del plano mediante un paralelogramo determinado, consumimos inútilmente parte de la

arbitrariedad de que disponemos. Si nos olvidamos de ello y empleamos después el teorema de Polke-Schwartz, llegamos a cometer graves errores. He aquí unos ejemplos.

En la fig. 39 está representada sobre el plano una pirámide cuadrangular regular. La representación  $SABCD$  considerada por sí sola está construida correctamente (véase el punto 13, ejemplo 2), pero en su conjunto la fig. 39, *a* es profundamente errónea. Al representar un pedazo rectangular del plano mediante el paralelogramo  $KLMN$ , hemos empleado ya en parte la arbitrariedad

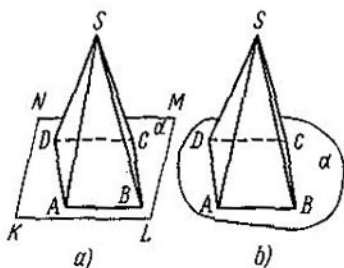


FIG. 39

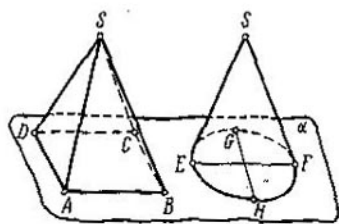


FIG. 40

que nos concede el teorema de Polke-Schwartz y no tenemos derecho de representar el cuadrado  $A'B'C'D'$  mediante un paralelogramo arbitrario. En la fig. 39, *a* los ángulos  $\sphericalangle NKL$  y  $\sphericalangle DAB$  representan ángulos rectos.  $AB \parallel KL$  y, por consiguiente, debe ser  $AD \parallel KN$ . Como esto no sucede, la fig. 39, *a* es errónea.

Podríamos evitar este error trazando  $AD \parallel KN$ . Pero la rectangularidad del pedazo del plano no tiene la menor importancia al estudiar las propiedades de la pirámide que en él se apoya. Por eso, carece de sentido someterse a la condición de que el ángulo  $\sphericalangle LKN$  es la representación de un ángulo recto y complicar con ello las construcciones posteriores. Precisamente por esta razón conviene representar el plano mediante un pedazo con «bordes irregulares» (fig. 39, *b*). Tal forma de representar el plano no nos somete a condición alguna. Cuando representamos una pirámide cuadrangular apoyada en este plano, conservamos la misma libertad de acción que al representar esta misma pirámide en el vacío.

He aquí otro error pérfido. En la fig. 40 aparecen representados una pirámide cuadrangular regular y un cono circular recto sobre el plano  $\alpha$  con bordes irregulares. Todo sería correcto si cada uno



de estos cuerpos tuviese su «base» propia. Pero cuando los colocamos sobre un mismo plano, la base de cada uno de los cuerpos determina en este plano su métrica propia y dichas métricas pueden no coincidir.

Tomemos en la fig. 40 la recta  $AB$  y determinemos la dirección perpendicular a ella.  $ABCD$  es la representación de un cuadrado. Por consiguiente,  $A'D' \perp A'B'$ . Tracemos ahora en la elipse el diámetro  $EF \parallel AB$  y construyamos el diámetro  $GH$  conjugado de  $EF$ . De modo que  $G'H' \perp E'F'$ . De esta forma la dirección perpendicular a  $AB$  se representa por la recta  $AD$  en la «métrica de la pirámide» y por la recta  $GH$  en la «métrica del cono». Las rectas  $GH$  y  $AD$  no son paralelas y ello muestra que la fig. 40 es errónea.

20. FIGURAS INSCRITAS Y CIRCUNSCRITAS. La representación exacta de las figuras inscritas y circunscritas requiere construcciones complicadas. En la solución de los problemas estereométricos, el dibujo desempeña un papel auxiliar y no tiene sentido gastar en hacerlo más tiempo del que exige la solución del problema mismo. Por eso, como regla recomendamos al lector hacer el dibujo a ojo. Sin embargo, señalemos algunas reglas principales cuya infracción conduce a errores graves.

1. ESFERA INSCRITA Y CIRCUNSCRITA. Representar la esfera es más difícil que representar los poliedros, el cilindro y el cono. Por eso, cuando se hace un dibujo en el que interviene la esfera, *se recomienda comenzar por la esfera y, agregar después a ella las demás figuras.*

2. ESFERA Y CILINDRO. Si la esfera está inscrita en el cilindro (fig. 41), la superficie lateral del cilindro es tangente a la esfera en los puntos de un círculo máximo, por ejemplo, del ecuador. El punto  $B$  está en el ecuador,  $AB = BC$  y  $AC = NS$ . Las tres elipses (la sección ecuatorial y las bases del cilindro) son iguales.

Si el cilindro está inscrito en la esfera (fig. 42), es preciso tener presente que las bases del cilindro son círculos paralelos de igual dimensión.

3. ESFERA Y PRISMA. Si la esfera está inscrita en el prisma (fig. 43), un círculo máximo (el ecuador, por ejemplo) resulta inscrito en la sección media del prisma (la sección determinada por el plano que es paralelo a las bases y equidista de las mismas). Por eso se recomienda hacer el dibujo en el orden siguiente.

1) Representar la esfera.

2) Circunscribir el polígono al ecuador. Aquí deben tenerse en cuenta las condiciones que determinan este polígono. Por ejemplo,

si se trata de un cuadrado (como en la fig. 43), sus lados son paralelos a los diámetros conjugados de la elipse.

3) Terminar de construir el prisma partiendo de las condiciones  $AC = NS$  y  $AB = BC$ .

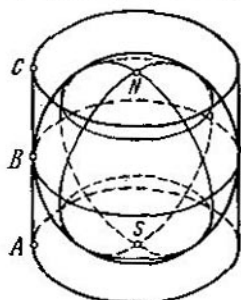


FIG. 41

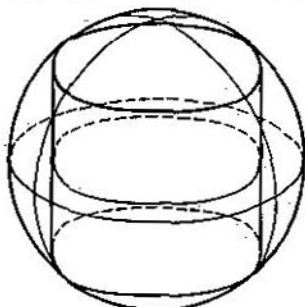


FIG. 42

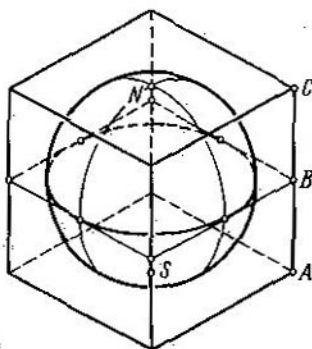


FIG. 43

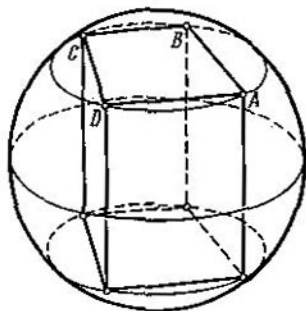


FIG. 44

Para representar un prisma inscrito en la esfera (fig. 44), hay que comenzar por inscribir el polígono en un círculo paralelo. Lo demás está claro.

4. ESFERA Y PIRÁMIDE. Si la esfera está inscrita en la pirámide (fig. 45), los puntos de tangencia con las caras laterales equidistan del vértice de la pirámide y se encuentran, por consiguiente, en un círculo paralelo cuyo plano es perpendicular a  $T'O'$  ( $O'$  es el centro de la esfera y  $T'$  es el vértice de la pirámide).

Si el plano correspondiente a la base de la pirámide es paralelo al plano que comprende los puntos de tangencia con las caras laterales (así ocurre, por ejemplo, en una pirámide regular), se puede hacer el dibujo en el orden siguiente.

1) Representar la esfera con su red de coordenadas (los meridianos y los círculos paralelos).

2) Tomar un círculo paralelo y circunscribir a él un polígono ( $A_1B_1C_1D_1$ , por ejemplo).

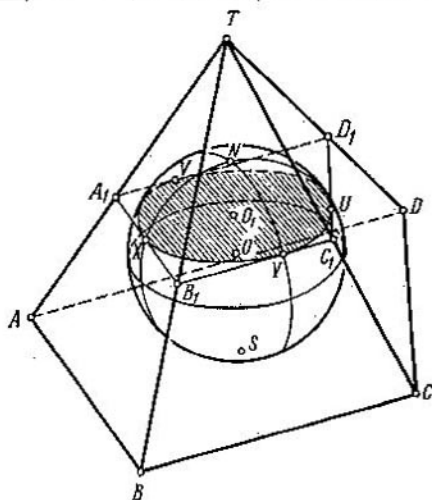


FIG. 45

3) Trazar por los puntos de tangencia  $X$ ,  $Y$ ,  $U$  y  $V$  las tangentes a los meridianos que pasan por estos puntos. Estas tangentes se cortarán en un mismo punto  $T$  que será precisamente el vértice de la pirámide. Unirlo con los puntos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  y  $D_1$ .

4) Terminar de construir la pirámide guiándose por la proporción

$$\frac{TA}{TA_1} = \frac{TS}{TO_1}$$

( $S'$  es el polo Sur y  $O_1$  es el centro del círculo paralelo inscrito en  $A_1B_1C_1D_1$ ).

Si el plano correspondiente a la base de la pirámide no es paralelo al plano que comprende el círculo paralelo inicial, el problema resulta mucho más complejo.

Si la esfera está circunscrita a la pirámide (fig. 46), la base de la pirámide resulta inscrita en un círculo paralelo y el vértice es un punto cualquiera de la esfera.

5. OTROS CASOS. Piense en ellos.

21. ALGUNOS CONVENCIONALISMOS DEL DIBUJO. En el punto 15 se ha hablado de las condiciones que se dan adicionalmente al dibujo. El dibujo y estas condiciones determinan el original con absoluta exactitud métrica. El dibujo sin las condiciones adicionales

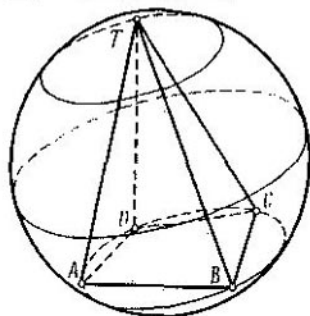


FIG. 46

no puede determinar el original con esta exactitud<sup>1)</sup>. En el punto 15 nos hemos referido a las condiciones que se enuncian verbalmente. Ahora consideraremos algunos *convencionalismos del dibujo* que acentúan su perceptibilidad. Esta frase un tanto vaga debe comprenderse así: los convencionalismos del dibujo eliminan la pluralidad de su interpretación. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. En la fig. 47, *a* aparecen representadas dos líneas. No se puede decir si se cortan o no. Para eliminar esta indeterminación se acepta el siguiente convencionalismo: si las líneas se cortan, se marca con un círculo el punto de intersección de las representaciones (fig. 47, *b*); si las líneas no se cortan, se interrumpe aquella que está más lejos del observador (fig. 47, *c*).

<sup>1)</sup> Aquí nos referimos a un tipo determinado de dibujo: a la representación en el plano por el método de proyecciones paralelas. Existen otros tipos de dibujo (por ejemplo, EL DIAGRAMA DE MONGE que representa las proyecciones ortogonales del original sobre dos planos perpendiculares) que, sin condiciones adicionales, determinan el original con absoluta exactitud métrica.

**EJEMPLO 2.** Cuando se representa una superficie, se la puede considerar opaca o semiopaca. En el primer caso no se trazan las líneas que escapan al ojo del observador. Esto es admisible si el dibujo tiene carácter exclusivamente ilustrativo (por ejemplo, si se representa algún objeto material). En la estereometría no conviene proceder de este modo, pues todas las líneas hacen falta. Por eso, las superficies se consideran semiopacas y las líneas que pasan por detrás de las mismas se marcan con trazos.

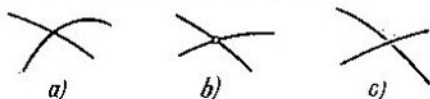


FIG. 47

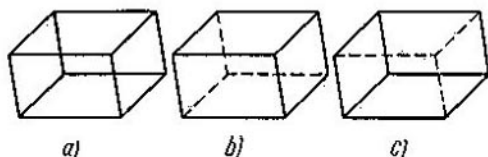


FIG. 48

¿Qué aparece representado en la fig. 48, *a*? No se puede dar una respuesta determinada a esta pregunta. Puede ser un paralelepípedo y también pueden ser doce segmentos repartidos en el espacio (existen otras muchas interpretaciones).

En las figs. 48, *b* y 48, *c* se han empleado dibujos convencionales. Ha desaparecido la indeterminación. Está claro que se trata de un paralelepípedo. En las figs. 48, *b* y 48, *c* el paralelepípedo tiene distintas posiciones y esta diferencia está determinada únicamente por los convencionalismos del dibujo: el paralelepípedo es el mismo.

22. ¿DE QUÉ DEPENDE LA PERCEPTIBILIDAD DE LA REPRESENTACIÓN? Se ha señalado ya (punto 18) que para la perceptibilidad de la representación es necesario que ésta sea correcta, es decir, que no contenga errores. Está claro que un dibujo erróneo no puede ser perceptible ya que las reglas de construcción de la representación corresponden al proceso visual. Sin embargo, no basta con que la representación sea correcta. En la fig. 49 vemos la fotografía de una persona con la mano extendida hacia delante. Si no supiésemos que se trata de una foto, quizás diríamos:

---

«No es posible. No parece natural. El pintor se ha equivocado». Pero la cámara no puede equivocarse y la representación de la fig. 49 es correcta aunque parezca natural.

¿Es posible representar un cubo como en la fig. 50? El teorema de Polke-Schwartz dice que sí, mientras que la mayoría de las personas dirán: «Esto no es un cubo». ¿Por qué?

---



FIG. 49

---

Para que la representación sea perceptible es necesario que se cumplan, aparte de la corrección, otras dos condiciones. La primera consiste en que el original debe ser mostrado *desde un punto de vista habitual*. Cuando consideramos un objeto, lo colocamos, como regla, por delante (delante de los ojos). En el método de proyecciones paralelas lo colocamos, además, *muy lejos* delante de nosotros. El plano de proyecciones se considera situado verticalmente entre los ojos y el original. Por consiguiente, los rayos visuales resultan *perpendiculares* al plano de proyecciones. Para que la representación sea perceptible, *el ángulo entre los rayos proyectantes y el plano*

de las proyecciones debe ser de  $90^\circ$  o próximo a  $90^\circ$ . Cuanto más se aleje este ángulo de  $90^\circ$ , menos perceptible resulta la representación. Explicuemos esto con dos ejemplos.

EJEMPLO 1. Volvamos a la fig. 50 y preguntémosnos: ¿desde qué punto debe observarse el cubo para que se presente de esta forma?

Un lector profano dirá: «Hay que colocar el cubo un poco por debajo de los ojos y desplazarlo muy lejos, hacia la derecha. Habrá que torcer la mirada hacia la derecha».

Un especialista precisará: «En la geometría descriptiva existen fórmulas que permiten determinar cómo ha sido proyectado el cubo a partir de su representación. La representación de la fig. 50 se

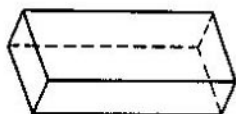


FIG. 50

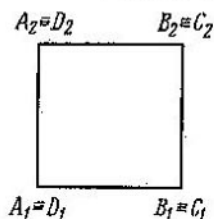


FIG. 51

obtiene mediante rayos proyectantes que forman un ángulo de  $14^\circ$  con el plano de proyecciones».

Ahora quedá claro por qué no se parece al cubo la pieza de la fig. 50: no estamos acostumbrados a observar el cubo en semejante posición.

EJEMPLO 2. En el punto 18 se ha explicado que la representación de la esfera no es perceptible si la proyección no es ortogonal (véase la fig. 33).

Posiblemente el lector se pregunta: ¿por qué pedimos que el ángulo entre los rayos proyectantes y el plano de las proyecciones sea próximo a  $90^\circ$ ? ¿por qué no exigir de forma categórica que sea igual a  $90^\circ$  exactamente?

Porque para la perceptibilidad es necesario que se cumpla una condición más: *los detalles importantes del original no deben tapar nunca unos a los otros*. Para cumplir esta condición, nos apartamos, a veces, del valor exacto de  $90^\circ$ .

En la fig. 51 aparece representado un cubo. No hay semejanza alguna y, sin embargo, la representación es correcta y el ángulo

---

es igual a  $90^\circ$ . La dirección de la proyección es paralela a la arista  $A_1D_1$  y el plano de proyecciones es paralelo a la cara  $A_1B_1B_2A_2$ . Así se presenta el cubo mirado por delante y desde lejos. La perceptibilidad ha sido alterada porque los vértices delanteros tapan los de atrás.

El cumplimiento de todas las condiciones mencionadas es suficiente para que la representación resulte perceptible.



## CAPÍTULO III

## MÉTODO DE CÁLCULO

23. TEORÍA DEL MÉTODO DE CÁLCULO. Hasta el momento hemos considerado las representaciones de las figuras más sencillas. Pero ¿cómo proceder si es preciso representar algo más complejo? ¿Estudiarse a fondo todo un curso de geometría descriptiva? Esto tiene sentido sólo para los especialistas; pero para cada persona es útil adquirir el hábito de dibujar sin errores.

El método de cálculo ofrece una salida. De la misma forma que los aparatos auditivos ayudan a las personas con la perceptividad del oído disminuida, el método de cálculo ayuda a la persona que no sabe dibujar. Tendrá que calcular las coordenadas de los puntos de la representación y marcarlas en papel milimétrico.

Tomemos en el espacio un sistema cartesiano rectangular de coordenadas  $(X', Y', Z')$  y en el plano de las representaciones, un sistema cartesiano rectangular de coordenadas  $(\xi, \eta)$  (fig. 52). A todo punto  $M'(x', y', z')$  del espacio le corresponde su representación, el punto  $M(\xi, \eta)$  del plano. Esto significa que las coordenadas del punto  $M$  son funciones de las coordenadas del punto  $M'$ :

$$\xi = F(x', y', z'), \quad \eta = G(x', y', z').$$

Es deseable conocer qué funciones son éstas. El siguiente teorema responde a dicha pregunta.

TEOREMA. *En el método de proyecciones paralelas, las coordenadas del punto representación son funciones lineales de las coordenadas del punto original, o sea,*

$$\begin{aligned} \xi &= a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1, \\ \eta &= a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2. \end{aligned} \quad (1)$$

OBSERVACIÓN. El hecho de que ambos sistemas de coordenadas sean cartesianos rectangulares no tiene importancia. El teorema es válido para cualesquiera sistemas afines. Pero sólo emplearemos sistemas cartesianos rectangulares. Para los lectores más interesados damos la demostración de este teorema en el Apéndice I. Los que estén dispuestos a darle crédito, pueden omitir la demostración.

Los coeficientes de las fórmulas (1) se pueden dar arbitrariamente, pero puede no gustarnos la representación obtenida.

Es preferible escoger primero la representación y determinar después los coeficientes que le corresponden.

Al escoger la representación, no debemos rebasar los derechos que se nos conceden; podemos indicar las representaciones de cuatro puntos en posición general, pero con ello quedarán determinadas las representaciones de los demás puntos. Lo más sencillo es escoger para los cuatro puntos iniciales el origen de las coordenadas y los puntos unidad de los ejes.

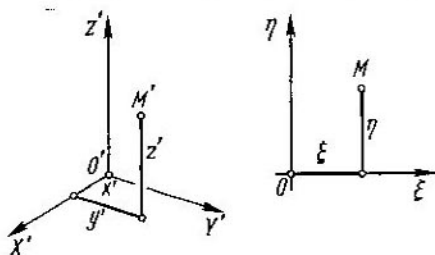


FIG. 52

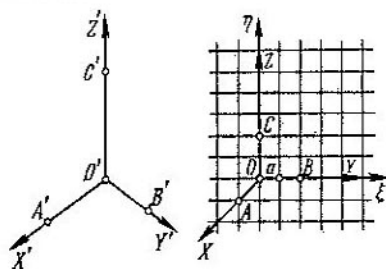


FIG. 53

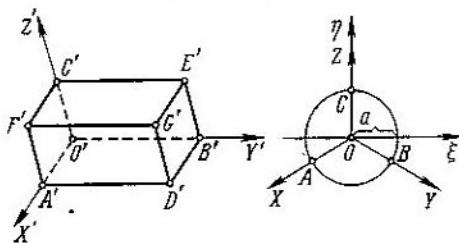


FIG. 54

Consideremos ahora la fig. 53. A la izquierda aparece el original (el lector debe aceptar que se trata del verdadero original tridimensional y no de un dibujo) y a la derecha, una representación escogida arbitrariamente. El sistema  $(\xi, \eta)$  permite calcular las coordenadas en el plano de las representaciones. Como no tiene importancia la posición del origen, conviene aceptar, para simplificar, que la representación del origen  $O'$  se encuentra siempre en el punto  $\xi = 0, \eta = 0$ . Entonces, las fórmulas (1) se escriben así:

$$\begin{aligned}\xi &= a_1x' + b_1y' + c_1z', \\ \eta &= a_2x' + b_2y' + c_2z'.\end{aligned}\quad (2)$$

Ahora (véase la fig. 53) escribimos:

el punto  $A'(1, 0, 0)$  se representa por el punto  $A(-a, -a)$ ,

el punto  $B'(0, 1, 0)$  se representa por el punto  $B(2a, 0)$ ,

el punto  $C'(0, 0, 1)$  se representa por el punto  $C(0, 2a)$ .

Introduciendo estos números en las fórmulas (2), determinaremos todos los coeficientes:  $a_1 = a_2 = -a$ ,  $b_1 = c_2 = 2a$  y  $c_1 = b_2 = 0$ . De este modo, a la representación de la fig. 53 le corresponden las fórmulas siguientes:

$$\xi = a(2y' - x'), \quad \eta = a(2z' - x'). \quad (3)$$

El parámetro  $a$  permite variar la dimensión del dibujo.

Es posible que la representación de la fig. 53 corresponde a una proyección no ortogonal. ¿Cómo proceder si es necesario que sea ortogonal? Existen dos modos, uno analítico y otro geométrico. El analítico se basa en el empleo de fórmulas que determinan la proyección ortogonal<sup>1)</sup>. Es preferible pasarse sin ello: no pretendemos especializarnos en geometría descriptiva. El modo geométrico no exige teoría alguna y se basa en la contemplación directa. Escojamos alguna dirección de la proyección, por ejemplo (para simplificar), la que forma ángulos iguales con todos los ejes de coordenadas. Para que esto quede más claro, coloquemos el cubo unidad en el primer octante (fig. 54). De nuevo pedimos al lector imaginarse que a la izquierda aparece el original verdadero y no un dibujo. Realicemos la proyección según la diagonal  $G'O'$  del cubo. Tomemos como plano de proyecciones el plano que pasa por  $O'$  y que es perpendicular a  $G'O'$  (¡esto es muy importante!). Está claro que los ejes  $X', Y', Z'$  se proyectarán sobre este plano de modo que los ángulos entre las proyecciones resultarán iguales

<sup>1)</sup> Véase [1], pág. 273.

(o sea,  $120^\circ$  cada uno) y que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se encontrarán a una misma distancia de  $O$  (fig. 54, a la derecha). Coloquemos los ejes  $(\xi, \eta)$  como se indica en el dibujo. La distancia  $OA$  se puede escoger arbitrariamente ya que la representación no es la proyección directa sino la proyección seguida de una transformación de semejanza. De la fig. 54 se ve que

el punto  $A'(1, 0, 0)$  se representa por el punto  $A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ ,

el punto  $B'(0, 1, 0)$  se representa por el punto  $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ ,

el punto  $C'(0, 0, 1)$  se representa por el punto  $C(0, a)$ .

Determinando (de la forma ya explicada) a partir de estas condiciones los coeficientes de las fórmulas (2), obtenemos

$$\xi = \frac{a\sqrt{3}}{2}(y' - x'), \quad \eta = \frac{a}{2}[2z' - (x' + y')]. \quad (4)$$

De este modo, las fórmulas (4) corresponden a la fig. 54. De la forma en que ha sido obtenido este dibujo resulta que *la representación determinada por las fórmulas (4) se obtiene mediante proyección ortogonal.*

24. PRÁCTICA DEL MÉTODO DE CÁLCULO. Apliquemos el método de cálculo a la construcción de una representación mucho más compleja que todas las consideradas hasta el momento.

*La esfera es cortada por un cilindro circular. El radio del cilindro es igual a la mitad del radio de la esfera. Una de las generatrices del cilindro pasa por el centro de la esfera. Representar la esfera, el cilindro y la línea de intersección (que se denomina CURVA DE VIVIANI).*

En la fig. 55 está representada la sección correspondiente al plano que pasa por el centro de la esfera y es perpendicular a las generatrices del cilindro. Tomemos el radio de la esfera igual a la unidad. Entonces, la ecuación de la esfera será

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad (5)$$

y la ecuación del cilindro será

$$\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Observemos que el radio de un círculo paralelo se determina mediante la fórmula

$$r = \cos \varphi, \quad (7)$$

donde  $\varphi$  es la latitud (no definimos los conceptos de latitud

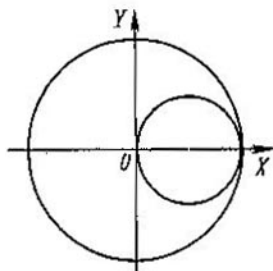


FIG. 55

y longitud sino que los tomamos de la geografía). Las coordenadas de cada punto de la esfera se expresan así:

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \theta, \\ y' &= r \sin \theta, \\ z' &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

( $\varphi$  es la latitud,  $\theta$  es la longitud y  $r$  es el radio del paralelo en el que se encuentra el punto).

La construcción de la representación por el método de cálculo consta de tres pasos:

- 1) Calcular las coordenadas de los puntos del original.
- 2) Calcular (por las fórmulas (2)) las coordenadas de los puntos de la representación.
- 3) Marcar los puntos en papel milimétrico.

PRIMER PASO. Tracemos círculos paralelos a cada  $30^\circ$  y calculemos sus radios a partir de la fórmula (7):

$\varphi$	$r = \cos \varphi$	$\varphi$	$r = \cos \varphi$
0	1,000	$60^\circ$	0,500
$30^\circ$	0,866	$90^\circ$	0,000

(estos mismos valores de  $r$  corresponden a los valores negativos de  $\varphi$ , o sea, a la latitud sur).

Ahora en cada uno de los paralelos tomemos un punto cada  $30^\circ$  y calculemos sus coordenadas a partir de las fórmulas (8).

Tabla I': paralelo  $\varphi = 0$ ,  $r = 1$   
(ecuador)

Nº del punto	$\Theta$	$x'$	$y'$	$z'$
1	$0^\circ$	1,000	0,000	0,000
2	$30^\circ$	0,866	0,500	0,000
3	$60^\circ$	0,500	0,866	0,000
4	$90^\circ$	0,000	1,000	0,000
5	$120^\circ$	-0,500	0,866	0,000
6	$150^\circ$	-0,866	0,500	0,000
7	$180^\circ$	-1,000	0,000	0,000
8	$210^\circ$	-0,866	-0,500	0,000
9	$240^\circ$	-0,500	-0,866	0,000
10	$270^\circ$	0,000	-1,000	0,000
11	$300^\circ$	0,500	-0,866	0,000
12	$330^\circ$	0,866	-0,500	0,000

Tabla II': paralelo  $\varphi = 30^\circ$ ,  $r = 0,866$

Nº del punto	$\Theta$	$x'$	$y'$	$z'$
1	$0^\circ$	0,866	0,000	0,500
2	$30^\circ$	0,750	0,433	0,500
3	$60^\circ$	0,433	0,750	0,500
4	$90^\circ$	0,000	0,866	0,500
5	$120^\circ$	-0,433	0,750	0,500
6	$150^\circ$	-0,750	0,433	0,500
7	$180^\circ$	-0,866	0,000	0,500
8	$210^\circ$	-0,750	-0,433	0,500
9	$240^\circ$	-0,433	-0,750	0,500
10	$270^\circ$	0,000	-0,866	0,500
11	$300^\circ$	0,433	-0,750	0,500
12	$330^\circ$	0,750	-0,433	0,500

Tabla III': paralelo  $\varphi = 60^\circ$ ,  $r = 0,500$ 

N <sup>o</sup> del punto	$\Theta$	$x'$	$y'$	$z'$
1	0°	0,500	0,000	0,866
2	30°	0,433	0,250	0,866
3	60°	0,250	0,433	0,866
4	90°	0,000	0,500	0,866
5	120°	-0,250	0,433	0,866
6	150°	-0,433	0,250	0,866
7	180°	-0,500	0,000	0,866
8	210°	-0,433	-0,250	0,866
9	240°	-0,250	-0,433	0,866
10	270°	0,000	-0,500	0,866
11	300°	0,250	-0,433	0,866
12	330°	0,433	-0,250	0,866

Tabla IV': paralelo  $\varphi = 90^\circ$ ,  $r = 0$   
(polo Norte)

N <sup>o</sup> del punto	$\Theta$	$x'$	$y'$	$z'$
1	—	0,000	0,000	1,000

Las tablas para los círculos paralelos del hemisferio austral difieren sólo en el signo de  $z'$ . Por ejemplo, la tabla correspondiente al paralelo  $\varphi = -30^\circ$  es la siguiente:  $x'$  e  $y'$  son las mismas que en la tabla II' y  $z' = -0,500$ .

SEGUNDO PASO. Calculemos las tablas para las coordenadas de los puntos de la representación. Tomemos la representación determinada por las fórmulas (4) y pongamos  $a = 100$  mm. Para ganar espacio, en todas las tablas, excepto la tabla I, aparecen los datos correspondientes a dos círculos paralelos cuyas latitudes difieren sólo en el signo: la ordenada  $\eta_1$  se refiere a los paralelos boreales y la ordenada  $\eta_2$ , a los paralelos australes.

Observemos que dos puntos simétricos respecto al plano del ecuador difieren sólo en el signo de  $z'$ . Si empleando la segunda de las fórmulas (4) calculamos primero  $\eta_1$  y después, sustituyendo

$z'$  por  $-z'$ , calculamos  $\eta_2$ , tendremos

$$\eta_1 - \eta_2 = 2az'$$

o (debido a que en nuestro caso  $a = 100$  mm)

$$\eta_1 - \eta_2 = 200 z'.$$

En cada una de las tablas  $z' = \text{const.}$  Esto permite fácilmente calcular  $\eta_2$ . Por ejemplo, para la tabla II se tiene  $\eta_2 = \eta_1 - 100$ .

Tabla I: paralelo  $\varphi = 0$   
(ecuador)

Nº del punto	$\xi$	$\eta$	Nº del punto	$\xi$	$\eta$
1	-86,6	-50,0	7	86,6	50,0
2	-31,7	-68,3	8	31,7	68,3
3	31,7	-68,3	9	-31,7	68,3
4	86,6	-50,0	10	-86,6	50,0
5	118,3	-18,3	11	-118,3	18,3
6	118,3	18,3	12	-118,3	-18,3

Tabla II: paralelos  $\varphi = \pm 30^\circ$

Nº del punto	$\xi$	$\eta_1$	$\eta_2$
1	-75,0	6,7	-93,3
2	-27,5	-9,2	-109,2
3	27,5	-9,2	-109,2
4	75,0	6,7	-93,3
5	102,4	34,2	-65,8
6	102,4	65,8	-34,2
7	75,0	93,3	-6,7
8	27,5	109,2	9,2
9	-27,5	109,2	9,2
10	-75,0	93,3	-6,7
11	-102,4	65,8	-34,2
12	-102,4	34,2	-65,8



Tabla III: paralelos  $\varphi = \pm 60^\circ$ 

Nº del punto	$\xi$	$\eta_1$	$\eta_2$
1	-43,3	61,6	-111,6
2	-15,8	52,4	-120,8
3	15,8	52,4	-120,8
4	43,3	61,6	-111,6
5	59,1	77,4	-95,8
6	59,1	95,8	-77,4
7	43,3	111,6	-61,6
8	15,8	120,8	-52,4
9	-15,8	120,8	-52,4
10	-43,3	111,6	-61,6
11	-59,1	95,8	-77,4
12	-59,1	77,4	-95,8

Tabla IV: paralelos  $\varphi = \pm 90^\circ$   
(polos Norte y Sur)

Nº del punto	$\xi$	$\eta_1$	$\eta_2$
1	0,0	100,0	-100,0

En esta etapa podemos iniciar en parte EL TERCER PASO y dibujar la representación de la esfera. Recomendamos al lector que haga el dibujo marcando los puntos correspondientes a las tablas de I a IV. Conviene que el lector tenga presente aquí las cuatro observaciones siguientes.

PRIMERA OBSERVACIÓN (de suma importancia). En las tablas de I a IV se dan los puntos de los paralelos. ¿Cómo dibujar entonces las representaciones de los meridianos?

En todas las tablas los puntos con los mismos números tienen la misma longitud. Por eso, *uniendo los puntos de mismo número, obtenemos la representación de los meridianos*. Por ejemplo, todos los puntos que llevan el Nº 3 se encuentran en el meridiano  $\theta = 60^\circ$ .

Por esta razón las tablas de I a IV permiten dibujar la representación de toda la red de coordenadas sobre la esfera.

SEGUNDA OBSERVACIÓN. Las coordenadas de los puntos de las tablas de I a IV vienen expresadas en milímetros. A partir de estas coordenadas hay que marcar los puntos en el papel

milimétrico sin realizar ningún cálculo adicional. Las coordenadas se dan con una cifra después de la coma, puesto que 0,1 mm es la máxima exactitud que puede alcanzar un buen delineante.

El parámetro  $a$  en las fórmulas (4) permite variar las dimensiones del dibujo. Señalemos que si aumentamos la escala multiplicando todas las coordenadas de las tablas de I a IV por un factor considerablemente superior a la unidad, también aumentará considerablemente el error. Por eso, para obtener un dibujo de tamaño más grande, habría que calcular las coordenadas de los puntos con una exactitud mayor.

TERCERA OBSERVACIÓN. No hay necesidad de calcular los puntos del contorno de la esfera. Conviene trazarlo con el compás. El centro está en (0, 0) y el radio es igual a

$$100 \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ mm} \approx 122,5 \text{ mm.}$$

CUARTA OBSERVACIÓN. Si el objetivo principal que se persigue es la perceptibilidad y no la solución de problemas geométricos, es preferible no trazar las partes invisibles de las líneas que complican el dibujo.

Ocupémonos ahora de la curva de Viviani. De las ecuaciones (7) y (8) se ve que las coordenadas de cada punto de la esfera unidad se expresan mediante la latitud y la longitud de este punto así:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \cos \varphi \cdot \cos \theta, \\ y' &= \cos \varphi \cdot \sin \theta, \\ z' &= \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Los puntos de la esfera que también pertenecen al cilindro deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones (9) y (6). De estas ecuaciones resulta

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \\ y' &= \pm \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \\ z' &= \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Las ecuaciones (10) son las ecuaciones paramétricas de la curva de Viviani. Tomando distintos valores para  $\varphi$ , obtendremos los puntos de esta curva. Si los valores de  $\varphi$  se escogen cada  $15^\circ$ , obtendremos 24 puntos. Por supuesto, los cálculos se realizan sólo

para  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ ; las coordenadas de los demás puntos se escriben basándose en la simetría.

Observemos que basta tomar sólo el signo superior de  $y'$ . Cuando  $\varphi$  varía de 0 a  $360^\circ$  el punto móvil de todos los modos recorre toda la curva. En efecto, si empleamos las fórmulas (10)

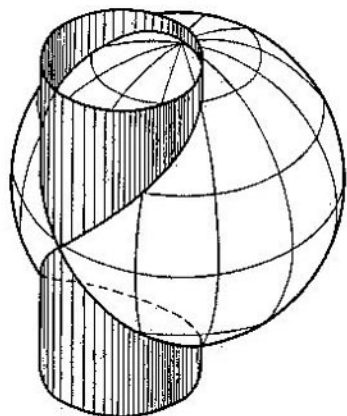


FIG. 56

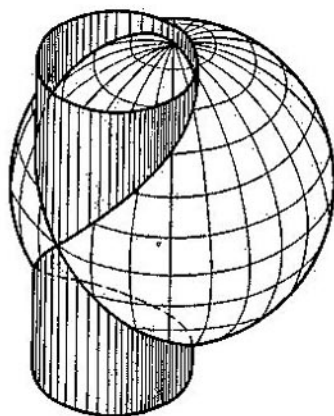


FIG. 57

con el signo superior y tomamos  $\varphi_1 = 90^\circ - \alpha$  y  $\varphi_2 = 90^\circ + \alpha$ , obtendremos el mismo par de puntos que empleando las fórmulas (10) con el signo doble.

Las coordenadas de los puntos de la representación se calculan según las fórmulas (4) con  $a = 100$  mm.

Para hacer el dibujo más perceptible, hagamos «sobresalir» un poco el cilindro de la esfera. Tracemos las secciones del cilindro correspondientes a los planos que pasan algo por encima y algo por debajo de los polos respectivos tomando, por ejemplo,  $z' = \pm 1,1$ . Las coordenadas de los puntos del original referentes a estas secciones se pueden calcular según las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(1 + \cos t), \\ y' &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \\ z' &= \pm 1,1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Después de todas estas explicaciones el lector podrá realizar fácilmente todos los cálculos. El dibujo de la fig. 56 ha sido construido basándose en los resultados que aparecen en las tablas (la escala ha sido disminuida). Las líneas invisibles no se representan salvo las que corresponden a la curva de Viviani.

La perceptibilidad de las representaciones de las superficies depende en parte de la densidad con que se traza la red de las coordenadas. La fig. 57 difiere de la fig. 56 sólo en que se ha trazado dos veces más paralelos y meridianos: uno cada 15°. Compare el efecto que produce cada uno de estos dibujos.

Tabla V': curva de Viviani

Nº del punto	$\varphi$	$x'$	$y'$	$z'$
1	0°	1,000	0,000	0,000
2	15°	0,933	0,250	0,259
3	30°	0,750	0,433	0,500
4	45°	0,500	0,500	0,707
5	60°	0,250	0,433	0,866
6	75°	0,067	0,250	0,966
7	90°	0,000	0,000	1,000
8	105°	0,067	-0,250	0,966
9	120°	0,250	-0,433	0,866
10	135°	0,500	-0,500	0,707
11	150°	0,750	-0,433	0,500
12	165°	0,933	-0,250	0,259
13	180°	1,000	0,000	0,000
14	195°	0,933	0,250	-0,259
15	210°	0,750	0,433	-0,500
16	225°	0,500	0,500	-0,707
17	240°	0,250	0,433	-0,866
18	255°	0,067	0,250	-0,966
19	270°	0,000	0,000	-1,000
20	285°	0,067	-0,250	-0,966
21	300°	0,250	-0,433	-0,866
22	315°	0,500	-0,500	-0,707
23	330°	0,750	-0,433	-0,500
24	345°	0,933	-0,250	-0,259

Tabla V: curva de Viviani

Nº del punto	$\xi$	$\eta$	Nº del punto	$\xi$	$\eta$
1	-86,6	-50,0	13	-86,6	-50,0
2	-59,1	-33,3	14	-59,1	-85,0
3	-27,5	-9,2	15	-27,5	-109,2
4	0,0	20,7	16	0,0	-120,7
5	15,8	52,4	17	15,8	-120,7
6	15,8	80,8	18	15,8	-112,4
7	0,0	100,0	19	0,0	-100,0
8	-27,5	105,8	20	-27,5	-87,4
9	-59,1	95,8	21	-59,1	-77,4
10	-86,6	70,7	22	-86,6	-70,7
11	-102,4	34,2	23	-102,4	-65,8
12	-102,4	-8,3	24	-102,4	-60,0

## APÉNDICE I

### EXPRESIÓN DE LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE LA REPRESENTACIÓN A TRAVÉS DE LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS DEL ORIGINAL

25. PROPIEDAD CARACTERÍSTICA DE LA FUNCIÓN LINEAL HOMOGÉNEA. Una propiedad característica de un objeto, o de un conjunto de objetos, es la propiedad que posee sólo este objeto, o sea, la propiedad que lo distingue de todos los demás. Por ejemplo, el número 2 es un número primo par. Esta es su propiedad característica.

La función  $f(x) = ax + b$  se denomina LINEAL; si  $b = 0$ , se la denomina LINEAL HOMOGÉNEA.

Si la igualdad

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (12)$$

se cumple idénticamente, o sea, para dos valores cualesquiera  $x_1$  y  $x_2$  del argumento, se dice que la función  $f(x)$  posee la PROPIEDAD ADITIVA. Está claro que la función lineal homogénea posee dicha propiedad. En efecto, si  $f(x) = ax$ , se tiene  $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$ . ¿Existen otras funciones que posean la propiedad aditiva? Entre las funciones continuas no existen: la función lineal homogénea es la única, o sea, la aditividad es su propiedad característica. Ahora demostraremos esto.

LEMA 1. Si  $f(x)$  es una función continua<sup>1)</sup> y para cualesquiera dos valores del argumento se tiene  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , entonces

$$f(x) = ax.$$

OBSERVACIÓN. La condición de continuidad no es necesaria: el lema subsiste en condiciones menos rígidas. Planteamos esta condición para simplificar la demostración.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\alpha$  un número real cualquiera distinto de 0. Tenemos  $f(2\alpha) = f(\alpha + \alpha) = f(\alpha) + f(\alpha) = 2f(\alpha)$ ,  $f(3\alpha) = f(2\alpha + \alpha) = f(2\alpha) + f(\alpha) = 2f(\alpha) + f(\alpha) = 3f(\alpha)$  y, por inducción, resulta que  $f(n\alpha) = nf(\alpha)$ . Si ponemos  $\alpha = 1$ , entonces  $f(1) = a$  y  $f(n) = an$ ,

<sup>1)</sup> Acerca de las funciones continuas véase H. Я. Виленкин и С. И. Шварцбург, Математический анализ, М., 1969, гл. III, § 3 (N. Ya. Vilenkin y S. I. Shvartzburd, Análisis matemático, capítulo III, § 3).

o sea, el lema queda ya demostrado para los valores naturales del argumento. Pongamos ahora  $\alpha = \frac{1}{q}$ , donde  $q$  es un número natural. Basándonos en lo ya demostrado, tenemos  $a = f(1) = f(q\alpha) = qf(\alpha) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$ , de donde

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = a \cdot \frac{1}{q}.$$

Sea  $p$  otro número natural. Entonces

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = p \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) = a \cdot \frac{p}{q}.$$

Ahora el lema queda demostrado ya para todos los valores racionales positivos del argumento. Si  $x$  es un número irracional (positivo), puede ser representado como el límite de una sucesión de números racionales:

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

En virtud de la continuidad de nuestra función se tiene

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (ar_n) = ax.$$

Para hacer extensivo el lema a todos los valores no positivos del argumento, observemos primero que  $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0)$ , de donde

$$f(0) = 0.$$

Sea ahora  $x = -\alpha$ , donde  $\alpha > 0$ ; tenemos  $f(\alpha - \alpha) = f(0) = 0$  y también tenemos  $f(\alpha - \alpha) = f[\alpha + (-\alpha)] = f(\alpha) + f(-\alpha)$ . De aquí resulta

$$f(x) = f(-\alpha) = -f(\alpha) = -a\alpha = a \cdot (-\alpha) = ax.$$

Con ello queda demostrado el lema para todos los números reales sin excepción. Este lema es extensivo a las funciones de varias variables.

LEMA 2. *Toda función de varias variables que es continua respecto a cada argumento y que posee la propiedad aditiva*

$$F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)^{1)}, \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Para abreviar empleamos el símbolo de una función de dos variables, pero el enunciado del lema y su demostración se refieren a una función de cualquier número de variables.

es lineal homogénea, o sea,

$$F(x, y) = ax + by.$$

DEMOSTRACIÓN. Para  $y = 0$  la función  $F(x, y)$  se convierte en la función  $F(x, 0)$  de una variable. Tomando  $y_1 = y_2 = 0$  en la fórmula (13), obtenemos  $F(x_1 + x_2, 0) = F(x_1, 0) + F(x_2, 0)$ . Por consiguiente, del lema 1 resulta  $F(x, 0) = ax$ . Análogamente se demuestra que  $F(0, y) = by$ .

En virtud de la propiedad (13) tenemos

$$F(x, y) = F(x, 0) + F(0, y) = ax + by$$

que es lo que se quería demostrar.

26. FÓRMULAS PARA LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE LA REPRESENTACIÓN. LEMA 3. Si los puntos  $O'(0, 0, 0)$ ,  $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$  y  $M'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$  tienen las representaciones respectivas  $O(0, 0)$ ,  $M_1(\xi_1, \eta_1)$  y  $M_2(\xi_2, \eta_2)$ , entonces el punto  $M'_3(x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2, z'_1 + z'_2)$  tiene la representación  $M_3(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si los puntos  $O'$ ,  $M'_1$  y  $M'_2$  no están sobre una misma recta, entonces  $O'M'_1M'_2M'_3$  es un paralelogramo y  $O'$  y  $M'_3$  son vértices opuestos. La representación de un paralelogramo es un paralelogramo. El punto  $M_3(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2)$  complementa el triángulo  $OM_1M_2$  hasta formar un paralelogramo (demostración: el punto medio del segmento  $OM_3$  coincide con el punto medio del segmento  $M_1M_2$ ). Por consiguiente,  $M_3$  es la representación del punto  $M'_3$ .

Si los puntos  $O'$ ,  $M'_1$  y  $M'_2$  se encuentran en una misma recta, se tiene

$$\frac{x'_1}{x'_2} = \frac{y'_1}{y'_2} = \frac{z'_1}{z'_2}. \quad (14)$$

Agregando la unidad a todos los miembros de las igualdades (14), obtenemos

$$\frac{x'_1 + x'_2}{x'_2} = \frac{y'_1 + y'_2}{y'_2} = \frac{z'_1 + z'_2}{z'_2}, \quad (15)$$

o sea, el punto  $M'_3(x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2, z'_1 + z'_2)$  se encuentra sobre la misma recta.

Sabemos que los puntos  $O$ ,  $M_1$  y  $M_2$  son las representaciones de los puntos  $O'$ ,  $M'_1$  y  $M'_2$ . Esto significa en primer lugar que



$O$ ,  $M_1$  y  $M_2$  se encuentran en una misma recta, o sea

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (16)$$

y en segundo lugar que  $(M_1M_2O) = (M'_1M'_2O')$ . Tenemos

$$(M_1M_2O) = \frac{M_1O}{OM_2} = -\frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (M'_1M'_2O') = \frac{M'_1O'}{O'M'_2} = -\frac{x'_1}{x'_2}.$$

Es decir,

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{x'_1}{x'_2}. \quad (17)$$

De (16) resulta

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_2} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_2}.$$

Esto significa que el punto  $M_3$  ( $\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2$ ) se encuentra en la recta  $OM_1M_2$ . Demostremos que divide el segmento  $M_1M_2$  en la misma razón en la que el punto  $M'_3$  divide el segmento  $M'_1M'_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{M_1M_3}{M_3M_2} &= \frac{(\xi_1 + \xi_2) - \xi_1}{\xi_2 - (\xi_1 + \xi_2)} = -\frac{\xi_2}{\xi_1}, \\ \frac{M'_1M'_3}{M'_3M'_2} &= \frac{(x'_1 + x'_2) - x'_1}{x'_2 - (x'_1 + x'_2)} = -\frac{x'_2}{x'_1}. \end{aligned}$$

De (17) se deduce que

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2} = \frac{M'_1M'_3}{M'_3M'_2}.$$

Es decir, el punto  $M_3$  es la representación del punto  $M'_3$ . Hemos demostrado el lema 3.

Si el espacio se transforma en el plano por el método de proyecciones paralelas, a cada punto  $M'(x', y', z')$  del espacio le corresponde un punto  $M(\xi, \eta)$  del plano. Esto significa que las coordenadas del punto  $M$  son funciones de las coordenadas del punto  $M'$ :

$$\xi = F(x', y', z'), \quad \eta = G(x', y', z'). \quad (18)$$

Estas funciones son continuas (respecto al conjunto de los argumentos y no tan sólo respecto a cada argumento). La con-

tinuidad se puede demostrar fácilmente con todo rigor; pero preferimos apelar a la intuición: está claro que los puntos cercanos del espacio tienen representaciones muy próximas<sup>1)</sup>.

Escribamos el lema 3 limitándonos a la primera fórmula para los puntos  $M'_1$ ,  $M'_2$  y  $M'_3$ :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= F(x'_1, y'_1, z'_1), \\ \xi_2 &= F(x'_2, y'_2, z'_2), \\ \xi_1 + \xi_2 &= F(x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2, z'_1 + z'_2).\end{aligned}$$

De aquí se ve que

$$F(x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2, z'_1 + z'_2) = F(x'_1, y'_1, z'_1) + F(x'_2, y'_2, z'_2). \quad (19)$$

En virtud del lema 2, de la igualdad (19) se deduce que

$$F(x', y', z') = a_1x' + b_1y' + c_1z'.$$

Razonamientos análogos se pueden aplicar también a la función  $G(x', y', z')$ :

$$G(x', y', z') = a_2x' + b_2y' + c_2z'.$$

Ahora nos libraremos de la hipótesis de que el origen se representa por el origen. Supongamos que la representación del punto  $O'(0, 0, 0)$  es un punto arbitrario  $O(d_1, d_2)$ . Aparte del sistema  $(\xi, \eta)$ , tomemos en el plano de las representaciones otro sistema de coordenadas  $(\xi^*, \eta^*)$  según las fórmulas

$$\xi^* = \xi - d_1, \quad \eta^* = \eta - d_2. \quad (20)$$

La representación del punto  $O'(0, 0, 0)$  tiene las coordenadas  $\xi = d_1, \eta = d_2$  en el antiguo sistema y  $\xi^* = 0, \eta^* = 0$  en el nuevo sistema. Según lo demostrado, las coordenadas nuevas de cada punto de la representación se expresan así:

$$\begin{aligned}\xi^* &= a_1x' + b_1y' + c_1z', \\ \eta^* &= a_2x' + b_2y' + c_2z'\end{aligned}$$

y las coordenadas antiguas, así:

$$\begin{aligned}\xi &= a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1, \\ \eta &= a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2\end{aligned} \quad (21)$$

que es lo que se quería demostrar.

<sup>1)</sup> ¡Lo recíproco no es cierto!

Como puede verse de los razonamientos, la rectangularidad de los sistemas no tiene importancia.

Es válido el teorema recíproco: si los coeficientes  $a_2$ ,  $b_2$  y  $c_2$  no son proporcionales a los coeficientes  $a_1$ ,  $b_1$  y  $c_1$ , las fórmulas (21) determinan la transformación del espacio en el plano correspondiente al método de proyecciones paralelas.

Este folleto tiene carácter geométrico y por eso no profundizaremos tanto en el aspecto analítico.

---

 APÉNDICE 2
 

---



---

 ELIPSE
 

---

27. CONTRACCIÓN UNIFORME. El modo más sencillo de construir la teoría de la elipse es emplear LAS TRANSFORMACIONES AFINES. Las transformaciones afines constituyen por sí solas un tema importante (más importante que el de este folleto) y no tiene sentido exponerlo en un apéndice como una cuestión auxiliar. Al lector que desee seriamente ocuparse de las transformaciones afines y la teoría de la elipse le recomendamos referirse a la literatura especial [por ejemplo, *И. М. Яглом и В. Г. Ашкинуде, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, часть I, Аффинная геометрия, М., 1962, pp. 1-17 (I. M. Yaglom and V. G. Ashkinuze, Ideas y métodos de la geometría afín y proyectiva, parte I, Geometría afín, puntos del 1 al 17)*]. Aquí en cambio, a título de información solamente, daremos las propiedades de la elipse necesarias para comprender cómo se representa la circunferencia.

Se denomina CONTRACCIÓN UNIFORME la siguiente transformación del plano. Se escoge una recta (que se denomina EJE DE CONTRACCIÓN) y todo punto  $M$  del plano se traslada a una nueva posición  $M'$  (fig. 58) según la perpendicular a la línea de contracción de modo que

$$M_0M' = \lambda \cdot M_0M \quad (22)$$

( $M_0$  es la proyección de los puntos  $M$  y  $M'$  sobre el eje de contracción). Aquí  $\lambda$  es una constante, siempre la misma para todos los puntos del plano. Si  $M \rightarrow M'$  (este símbolo significa: «el punto  $M$  se transforma en el punto  $M'$ » o «al punto  $M$  le corresponde el punto  $M'$ ») y  $N \rightarrow N'$ , entonces

$$M_0M' = \lambda \cdot M_0M,$$

$$N_0N' = \lambda \cdot N_0N.$$

Se dice que  $\lambda$  es EL COEFICIENTE DE CONTRACCIÓN. Aceptaremos siempre que  $\lambda > 0$ . También se puede definir la contracción de coeficiente negativo (en este caso los puntos correspondientes aparecen a distintos lados del eje de contracción), pero no nos hará falta.

Señalemos algunas propiedades de la contracción uniforme:

1. Todo punto del eje de contracción conserva su posición (o sea, corresponde a sí mismo).

2. Si  $\lambda < 1$ , todos los puntos (no pertenecientes al eje de contracción) se acercan al eje. Si  $\lambda > 1$ , todos los puntos se alejan del eje. Lo natural en este caso sería dar a la transformación (22) el nombre de *dilatación* y no de *contracción*. Pero en las Matemáticas es preferible usar una terminología uniforme aun cuando esté en contradicción con el uso habitual de las palabras. Por eso, siempre utilizaremos el término «contracción», incluso si  $\lambda > 1$ .

Si  $\lambda = 1$ , todos los puntos conservan su posición y el eje de contracción resulta indeterminado. Es posible que este caso carezca de interés, pero todo caso particular merece ser destacado. Esta transformación se denomina **TRANSFORMACIÓN IDÉNTICA**.

3. Las rectas se transforman en rectas. Aclaremos que el transformar una línea (y, en general, una figura cualquiera)

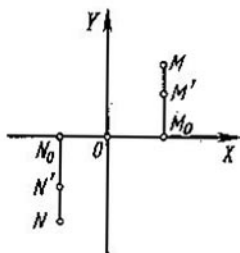


FIG. 58

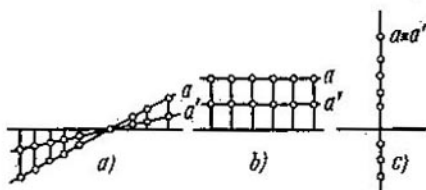


FIG. 59

significa transformar cada uno de sus puntos. Si la recta corta el eje de contracción, la recta que le corresponde también lo corta (en el mismo punto) (fig. 59, a). Si la recta  $a$  forma el ángulo  $\alpha$  con el eje de contracción y la recta  $a'$  forma el ángulo  $\alpha'$ , entonces

$$\operatorname{tg} \alpha' = \lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Toda recta paralela al eje de contracción se transforma en otra recta, también paralela al eje de contracción (fig. 59, b). Toda recta perpendicular al eje de contracción se transforma en sí misma (aunque sus puntos se desplazan sobre la misma).

4. Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas. Esto se deduce inmediatamente de la propiedad anterior.

5. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos pertenecientes a una recta, la razón de los mismos es un invariante de la contracción uniforme, o sea,

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB} \quad (23)$$

(esto se demuestra fácilmente: basta considerar la fig. 59). En particular, el punto medio de un segmento se transforma en el punto medio.

6. Hablando en términos generales, dos direcciones perpendiculares no se transforman en direcciones perpendiculares. Pero existen casos en los que  $a \perp b$  y también  $a' \perp b'$ . Señalemos estos casos.

1) Si  $\lambda \neq 1$ , existe un *único* par de direcciones perpendiculares que permanecen perpendiculares después de la contracción: las direcciones paralela y perpendicular al eje de contracción. Llevan el nombre de DIRECCIONES PRINCIPALES DE LA CONTRACCIÓN.

2) Si  $\lambda = 1$ , cualesquiera dos rectas perpendiculares permanecen perpendiculares después de la contracción, o sea, las direcciones principales resultan indeterminadas (todas las direcciones son principales).

7. La transformación inversa de la contracción uniforme es también una contracción uniforme (respecto al mismo eje).

Dos transformaciones se denominan RECÍPROCAMENTE INVERSAS si la primera transforma todo punto  $M$  del plano en una posición nueva  $M'$  y la segunda hace retornar todo punto  $M'$  en la posición  $M$ . En otras palabras, si sometemos sucesivamente el plano a dos transformaciones recíprocamente inversas, todos los puntos conservarán su posición. La propiedad 7 resulta de la fórmula (22). De ella resulta que

$$M_0M = \frac{1}{\lambda} M_0M',$$

o sea, son del mismo tipo las fórmulas que vinculan  $M_0M$  y  $M_0M'$  entre sí. De paso se aclara que los coeficientes de contracción de dos contracciones recíprocamente inversas son  $\lambda$  y  $\frac{1}{\lambda}$ .

8. Tomemos el eje  $X$  como eje de contracción (fig. 58) y demos la expresión analítica de una contracción uniforme. Si el punto  $M(x, y)$  se transforma en el punto  $M'(x', y')$ , entonces

$$x' = x, \quad y' = \lambda y. \quad (24)$$

28. DEFINICIÓN DE LA ELIPSE. Se denomina *elipse* la línea que se obtiene mediante la *contracción uniforme* de la *circunferencia* hacia su *diámetro* (fig. 60).

OBSERVACIÓN 1. La elipse se puede definir de distintos modos. Sería mejor definirla como la línea que se obtiene de la circunferencia por efecto de una transformación afín si es que supiéramos qué significa esto. La contracción uniforme es un caso particular de la transformación afín.

OBSERVACIÓN 2. El coeficiente de la contracción que se menciona en la definición puede tomar cualquier valor positivo. La fig. 60 corresponde al caso  $\lambda < 1$ . Si  $\lambda = 1$ , se obtiene la circunferencia. Por consiguiente, la circunferencia es un caso particular de la elipse.

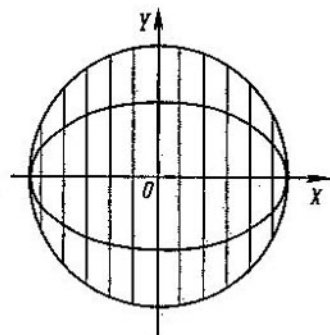


FIG. 60

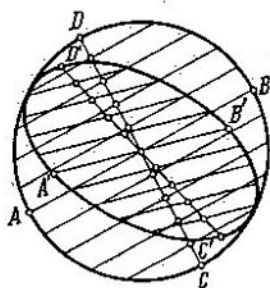


FIG. 61

OBSERVACIÓN 3. Existen los términos «circunferencia» y «círculo». La circunferencia es el contorno del círculo. En el caso de la elipse existe un sólo término que se emplea para hablar de una porción del plano y del contorno que la limita.

29. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA ELIPSE. En la fig. 61  $AB$  y  $CD$  son dos diámetros recíprocamente perpendiculares de la circunferencia. Cada uno de ellos biseca las cuerdas paralelas al otro. En la figura se han representado las cuerdas paralelas a  $AB$  y se han marcado sus puntos medios: estos se encuentran sobre  $CD$ .

En la misma figura se ha realizado la contracción respecto a cierto diámetro. La circunferencia se ha convertido en la elipse

y los diámetros  $AB$  y  $CD$ , en  $A'B'$  y  $C'D'$ , respectivamente. Ha desaparecido la perpendicularidad de los diámetros, pero las cuerdas paralelas al diámetro  $AB$  se han transformado en cuerdas paralelas de la elipse y sus puntos medios, en los puntos medios respectivos. Comparando la elipse y la circunferencia, llegamos a las siguientes conclusiones.

1) *Los puntos medios de las cuerdas paralelas de la elipse se encuentran en una recta.*

El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas se denomina DIÁMETRO de la elipse CONJUGADO de estas cuerdas.

2) Se pueden considerar las cuerdas paralelas a este diámetro. El diámetro conjugado de éstas pertenece a la primera familia de cuerdas. De este modo la conjugación es una propiedad recíproca.

*Dos diámetros de la elipse se denominan conjugados si cada uno biseca las cuerdas paralelas al otro.*

3) *Todos los diámetros de la elipse pasan por un mismo punto denominado centro de la elipse. El centro de la elipse representa su centro de simetría.*

4) *Las tangentes a la elipse trazadas por los extremos de un diámetro son paralelas al diámetro conjugado.*

Los diámetros recíprocamente perpendiculares de la circunferencia se transforman por efecto de la contracción en diámetros conjugados de la elipse que, hablando en términos generales, dejan de ser perpendiculares. La única excepción son los diámetros perpendiculares de la circunferencia correspondientes a las direcciones principales. Esto significa que uno de los diámetros se encuentra en el eje de contracción y el otro es perpendicular a éste. Por consiguiente,

5) *Toda elipse distinta de una circunferencia posee un par único de diámetros conjugados recíprocamente perpendiculares.*

Estos diámetros llevan el nombre de EJES DE LA ELIPSE y constituyen sus EJES de simetría. En la fig. 62 se ha tomado  $\lambda < 1$ .  $AB$  se denomina EJE MAYOR y  $C'D'$ , EJE MENOR. Se acostumbra designar por  $2a$  el eje mayor y por  $2b$  el eje menor.  $OB = a$  se denomina SEMIEJE MAYOR y  $OD' = b$ , SEMIEJE MENOR. Los extremos de los ejes llevan el nombre de VERTICES de la elipse.

Ahora queda claro que en el caso  $\lambda > 1$  no obtenemos nada nuevo, sólo  $AB$  será el eje menor y  $C'D'$ , el eje mayor. Por eso, podemos limitarnos a considerar el caso  $\lambda < 1$ .



De lo expuesto queda claro que  $b = \lambda a$ , o sea

$$\lambda = \frac{b}{a}. \quad (25)$$

6) Deduzcamos la ecuación de la elipse situando los ejes de coordenadas como se indica en la fig. 60. La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (26)$$

Expresemos las coordenadas  $(x, y)$  de los puntos de la circunferencia a través de las coordenadas  $(x', y')$  de los puntos

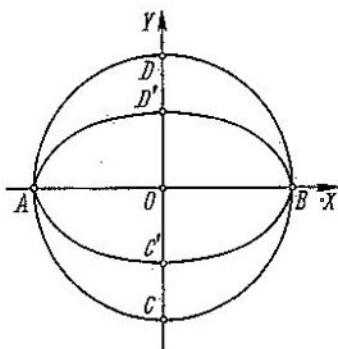


FIG. 62

correspondientes de la elipse empleando para ello las fórmulas (24). Entonces la ecuación (26) toma la forma

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\lambda^2} = a^2.$$

Sustituyamos  $\lambda$  según la fórmula (25):

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = a^2 \text{ o más sencillamente } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Hemos empleado la vírgula sólo para distinguir las coordenadas de los puntos de la elipse y las coordenadas de los puntos de la circunferencia. Si nos olvidamos de la circunferencia y consideramos

la elipse por sí sola, las virgulas huelgan:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (27)$$

7) La razón  $\frac{b}{a}$  de los semiejes queda comprendida entre los límites

$$0 < \frac{b}{a} \leq 1. \quad (28)$$

Esta razón determina la forma de la elipse. Si  $\frac{b}{a}$  es pequeño, la elipse tiene una forma muy oblonga; con el crecimiento de  $\frac{b}{a}$  la elipse se hace «más redonda»; cuando  $\frac{b}{a} = 1$ , la elipse es una circunferencia.

¿Por qué excluimos el caso  $\frac{b}{a} = 0$ , o sea  $b = 0$ ? Si  $b = 0$ , la elipse degenera en un segmento doble. ¿Podemos decir que es una elipse? Esto es una cuestión convencional. Podemos considerar que es una elipse, pero entonces tendríamos que admitir la contracción uniforme de coeficiente  $\lambda = 0$ . En tal caso habría que revisar algunas de las propiedades de la contracción uniforme expuestas anteriormente.

30. LA ELIPSE COMO PROYECCIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA. Tiene lugar el siguiente teorema.

TEOREMA. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos planos no perpendiculares y en el plano  $\alpha$  se da una circunferencia, su proyección ortogonal sobre el plano  $\beta$  es una elipse.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que los planos  $\alpha$  y  $\beta$  se cortan (fig. 63). Tracemos en la circunferencia el diámetro  $A'B'$  paralelo al plano  $\beta$  (o sea, paralelo a la línea de intersección de los planos  $\alpha$  y  $\beta$ ). Este diámetro se proyecta en el segmento  $AB$ , que es igual a  $A'B'$  y que también es paralelo a la línea de intersección de los planos. Designemos por  $2a$  la longitud común de estos segmentos:  $A'B' = AB = 2a$ . Consideremos ahora en la circunferencia una cuerda cualquiera  $M'N'$  perpendicular a  $A'B'$ . El punto  $P'$  es el punto medio de la cuerda  $M'N'$ . La semicuerda  $P'N'$  se proyecta en el segmento  $PN$  perpendicular a  $AB$  (según

el teorema de las tres perpendiculares). El punto  $P$  tiene en  $AB$  la misma posición que el punto  $P'$  en  $A'B'$ , o sea,  $OP = O'P'$ . La longitud de la proyección del segmento  $P'N'$  se determina por la fórmula conocida  $PN = P'N' \cdot \cos \varphi$ , donde  $\varphi$  es el ángulo rectilíneo del ángulo diedro que forman los planos  $\alpha$  y  $\beta$ .

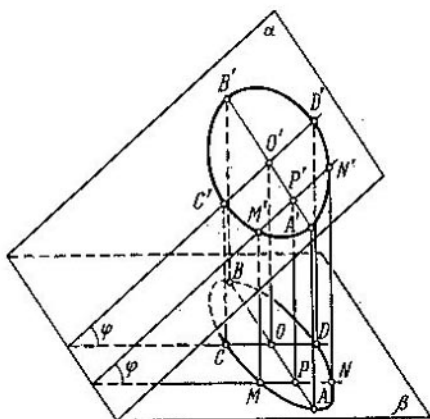


FIG. 63

Resulta que el diámetro  $A'B'$  se proyecta sobre  $\beta$  conservando su dimensión natural y que todas las semicuerdas  $P'N'$  se transforman manteniendo «sus posiciones». Si estas últimas conservasen sus dimensiones naturales, en el plano  $\beta$  obtendríamos la misma circunferencia que en el plano  $\alpha$ . Pero, en realidad, estas semicuerdas disminuyen al pasar al plano  $\beta$ : todas se multiplican por un mismo coeficiente (¡Atención! Este es el momento esencial en la demostración) igual al coseno del ángulo entre los planos. Por consiguiente, la proyección que nos ocupa representa la contracción uniforme de la circunferencia respecto a su diámetro, o sea, representa una elipse.

Hemos supuesto que los planos  $\alpha$  y  $\beta$  se cortan. Si son paralelos, la situación es incluso más sencilla: la proyección de la circunferencia es una circunferencia idéntica a la que se proyecta. Es decir, hemos demostrado el teorema.

Hagamos una observación adicional. Entre las semicuerdas de la circunferencia perpendiculares a  $A'B'$  figura el radio  $O'D' = a$ .

Está claro que su proyección es el eje menor  $b$  de la elipse. Es decir,  $b = a \cdot \cos \varphi$ .

Por consiguiente, el teorema demostrado puede completarse de la forma siguiente: «... es una elipse en la cual la razón de los semiejes es igual al coseno del ángulo entre los planos  $\alpha$  y  $\beta$ », o sea,

$$\frac{b}{a} = \cos \varphi. \quad (29)$$

Si los planos  $\alpha$  y  $\beta$  son perpendiculares, la proyección de la circunferencia es un segmento doble.

31. SECCIÓN DEL CILINDRO CIRCULAR. Es válida la siguiente afirmación.

TEOREMA. *La sección del cilindro circular que se obtiene mediante un plano no paralelo a las generatrices es una elipse.*

OBSERVACIÓN. Se trata de un cilindro infinito, o sea, de un tubo infinito sin bases.

No daremos la demostración detallada por cuanto coincide casi íntegramente con la anterior, difiriendo de ella sólo en un momento. En la fig. 64 aparece la sección del cilindro circular mediante el plano  $\beta$ . Se desconoce por ahora si es una elipse. También aparece la sección normal del cilindro (mediante el plano  $\alpha$ ). Es una circunferencia. Tracemos en la circunferencia el diámetro  $A'B'$  paralelo al plano  $\beta$  (es único este diámetro) y «elevemos» sus extremos a lo largo de las generatrices hasta llegar al plano  $\beta$ . Obtendremos la cuerda  $AB$  tal que  $AB = A'B'$ . Sea  $P'N'$  una semicuerda de la circunferencia perpendicular a  $A'B'$ . Elevando esta cuerda al plano  $\beta$ , obtendremos el segmento  $PN$ . La diferencia con la demostración anterior está en que el segmento  $PN$  se obtiene de  $P'N'$  mediante la división, y no la multiplicación, por  $\cos \varphi$ :

$$PN = \frac{P'N'}{\cos \varphi}.$$

Puesto que el factor  $\frac{1}{\cos \varphi}$  es constante, resulta que es una elipse la sección correspondiente al plano  $\beta$ .

A diferencia de la situación anterior, el diámetro de la circunferencia que conserva su longitud:

$$AB = A'B',$$

representa el semieje menor, y no el mayor, de la elipse. Pero también en este caso sigue siendo válida la fórmula (29).

## 32. ALGUNAS CONSTRUCCIONES RELACIONADAS CON LA ELIPSE.

1. Está dada (o sea, trazada) una elipse. Hallar su centro. Trazamos dos cuerdas paralelas (fig. 65). Las dividimos por la mitad. Unimos los puntos medios obteniendo un diámetro. Dividimos por la mitad el diámetro; el punto medio del diámetro es el centro.

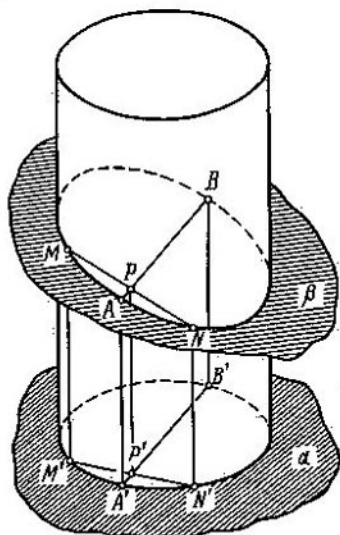


FIG. 64

2. Construir el diámetro conjugado de uno dado. Tracemos una cuerda paralela al diámetro dado. Dividimos el diámetro y esta cuerda por la mitad. Uniendo el punto medio del diámetro (el centro de la elipse) y el punto medio de la cuerda, obtenemos el diámetro conjugado del dado.

3. En la elipse se da un punto  $M$ . Trazar la tangente a la elipse en este punto. Unimos el punto  $M$  y el centro  $O$  de la elipse. Construimos el diámetro conjugado del diámetro  $OM$ . Trazamos por el punto  $M$  la recta paralela a este diámetro conjugado; es la tangente buscada.

4. Construir los ejes de la elipse. Si el punto  $M$  describe una cuarta parte de la elipse desde el extremo del eje mayor hasta el extremo del eje menor, el radio vector  $OM$  varía continuamente alcanzando una vez cada uno de los valores comprendidos entre

$a$  y  $b$ . Al recorrer cada uno de los cuadrantes restantes, el radio vector de nuevo alcanza una vez estos mismos valores.

Dos puntos de la elipse simétricos respecto a uno de sus ejes tienen el mismo radio vector. Recíprocamente, si dos puntos de la elipse, situados a un mismo lado del eje mayor (menor), tienen idénticos radios vectores, estos puntos son simétricos respecto al eje menor (mayor) (esto resulta de que el radio vector sólo una vez alcanza en cada cuadrante uno de los valores posibles).

De aquí se deduce el siguiente procedimiento para construir los ejes (fig. 66).

Construimos la circunferencia cuyo centro coincide con el centro

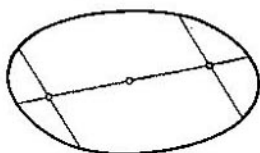


FIG. 65

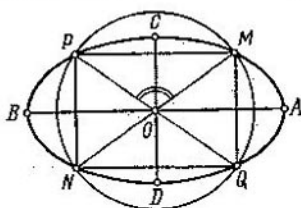


FIG. 66

$O$  de la elipse y cuyo radio  $r$  es mayor que  $b$  pero menor que  $a$ :

$$b < r < a.$$

Esta circunferencia corta la elipse en cuatro puntos  $M$ ,  $P$ ,  $N$  y  $Q$ . Estos puntos tienen idénticos radios vectores y, por consiguiente, son simétricos respecto a los ejes de la elipse. Por eso, resta reconstruir los ejes de simetría de la cuaterna de puntos  $M$ ,  $P$ ,  $N$  y  $Q$ . Para ello hay que:

o bien trazar las bisectrices de los ángulos que forman las rectas  $MN$  y  $PQ$ ,

o bien trazar las líneas medias del rectángulo  $MPNQ$ .

Los ejes de simetría  $AB$  y  $CD$  así obtenidos son precisamente los ejes de la elipse.

5) Construir la elipse a partir de un par de diámetros conjugados. Hemos señalado ya (punto 10) que «construir la elipse» significa construir tantos puntos de la elipse como se quiera.

Sean dados dos diámetros conjugados  $AC$  y  $BD$  de la elipse (fig. 67,  $b$ ). Tomemos una circunferencia y un cuadrado circunscrito a ella. Indiquemos por  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  y  $D_0$  los puntos de tangencia.

Aceptemos que  $A_0C_0$  y  $B_0D_0$  son los diámetros que por efecto de la contracción de la circunferencia se transforman en los diámetros conjugados  $AC$  y  $BD$  de la elipse (¡Cuidado! No piense que  $A_0C_0$  o  $B_0D_0$  es el eje de contracción). Dividamos  $O_0B_0$  en varias partes iguales (en cuatro partes en la fig. 67) y  $B_0E_0$  en el mismo número de partes iguales. Tomemos un mismo número de partes desde el punto  $O_0$  hacia arriba y desde  $E_0$  hacia la izquierda; obtendremos los puntos  $M_0$  y  $N_0$ , respectivamente. Tracemos las rectas  $C_0M_0$  y  $A_0N_0$ ; el punto de intersección de

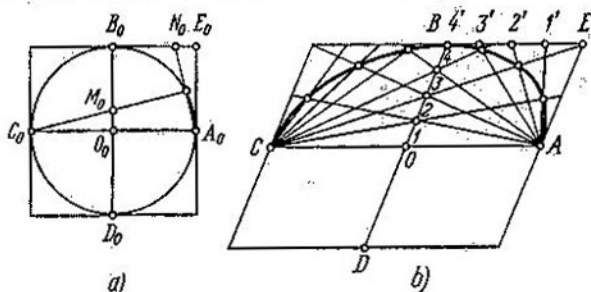


FIG. 67

estas rectas pertenece a la circunferencia. En efecto, de la igualdad de los triángulos  $O_0M_0C_0$  y  $E_0N_0A_0$  resulta que  $A_0N_0 \perp C_0M_0$ .

Por efecto de la contracción, el cuadrado se convertirá en un paralelogramo; los segmentos  $OB$  y  $BE$  permanecerán divididos en partes iguales cada uno, pero  $OB$  y  $BE$  ya no serán iguales. La construcción se realiza así (fig. 67, b). Construimos un paralelogramo considerando que  $AC$  y  $BD$  son sus líneas medias. Dividimos  $OB$  en partes iguales e indicamos por 1, 2, 3, ... los puntos de división; también dividimos  $EB$  en partes iguales e indicamos por 1', 2', 3', ... los puntos de división. Los puntos de intersección  $C1 \times A1'$ ,  $C2 \times A2'$ ,  $C3 \times A3'$ , ... pertenecen a la elipse.

Recomendamos al lector analizar, basándose en el dibujo, cómo se obtienen los puntos de la elipse en los cuadrantes restantes.

## CONCLUSIÓN

33. RECOMENDACIONES BIBLIOGRÁFICAS. Hemos llegado al momento más difícil: ¿qué bibliografía recomendar al lector que se haya interesado en el tema y pretende continuar su estudio? Es difícil dar recomendaciones sin conocer personalmente al lector. Planteemos primero algunas hipótesis: 1. El lector tiene entre 15 y 17 años. 2. Estudia en uno de los grados superiores de la secundaria. 3. En el alma es matemático.

Si esto es así, no le recomendamos leer ningún tratado voluminoso ni monografía: esto detendrá su avance. Es preciso avanzar lo más rápidamente posible y familiarizarse con nuevas ideas matemáticas. Si el lector no piensa especializarse en geometría descriptiva, le bastará con el material expuesto en este folleto. Garantiza un mínimo de saber en la elaboración de los dibujos.

Si el lector desea ampliar un tanto sus conocimientos en lo que se refiere, por ejemplo, a las propiedades de las proyecciones centrales, conviene ver:

[1] *H. M. Бескин*, *Методы изображений*, Энциклопедия элементарной математики, книга 4-я, Геометрия, М., 1963, Физматгиз, стр. 228—290 (N. M. Beskin, *Métodos de las representaciones*, Enciclopedia de las Matemáticas elementales, libro 4º, Geometría, págs. de 228 a 290). En muchos aspectos este artículo coincide con nuestro folleto.

Al lector que quiera ejercitarse en la aplicación de los conocimientos adquiridos, le convendrán los libros:

[2] *Н. Ф. Четверухин*, *Стереометрические задачи на проекционном чертеже*, М., 1955 (N. F. Chetverujin, *Problemas estereométricos en el dibujo de proyección*).

[3] *Л. М. Лоповок*, *Сборник стереометрических задач на построение*, М., 1953 (L. M. Lopovok, *Colección de problemas estereométricos de construcción*).

Para el lector pintor que se interese por el dibujo recomendamos:

[4] *Г. А. Владимирский*, *Перспектива*, М., 1952 (G. A. Vladimírski, *Perspectiva*).

[5] *В. В. Щербина*, *Техническое рисование*, М., 1952 (V. V. Tsherbina, *Diseño técnico*). En este libro se trata de cómo dibujar los cuerpos geométricos.

Por último, se puede recomendar a todos los lectores el interesante libro:

[6] *А. И. Островский*, *Начертательная геометрия в популярном изложении*, изд. 2-е, М., 1963 (A. I. Ostrovski, *Geometría descriptiva expuesta elementalmente*, 2ª ed.).



---

**A NUESTROS LECTORES:**

---

“Mir” edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial “Mir”, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

A solicitud de los lectores extranjeros en 1978 sale  
a la luz la segunda edición del libro de

**Kalnin R.**

## **ÁLGEBRA Y FUNCIONES ELEMENTALES**

El material de este libro corresponde al programa de las escuelas medias profesionales. En el primer capítulo se dan los elementos de cálculos aproximados. En los capítulos siguientes se estudian las ecuaciones de primer orden, desigualdades y números reales. El sexto capítulo se dedica al análisis detallado de las nociones principales sobre las funciones y trinomios cuadrados cuyo aprendizaje facilita el acceso al conocimiento de las ecuaciones cuadráticas. En el capítulo "Vectores" se da la idea sobre las coordenadas del vector y sobre la descomposición de éste por los ejes. En aquellas partes donde están representadas las ecuaciones de tipo determinado se habla también sobre las desigualdades respectivas. Con ello el autor siempre recurre a procedimientos gráficos para resolver ecuaciones y desigualdades. Al final del libro se da una relación de fórmulas básicas y una tabla de funciones  $e^x$ ,  $e^{-x}$ ,  $\operatorname{sen} x$ ,  $\operatorname{cos} x$ , la cual se aplica, por ejemplo, en la reducción de los números complejos de la forma algebraica a la exponencial. En el capítulo "Regla de cálculo" el autor ha incluido seis párrafos dedicados a la determinación de los valores de las funciones trigonométricas mediante la regla de cálculo y el problema recíproco. Este libro se recomienda para los centros de enseñanza profesional media.



# Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial 1977

"Lecciones populares de matemáticas"

Rosenfeld B., Sergueeva N.

Proyección estereográfica

Yaglom I. Algebra extraordinaria

Ventsel E. Elementos

de la teoría de los juegos

Natanson I. Problemas elementales

de máximo y mínimo

Barsov A. Que es programación lineal

Boltianski V. La envolvente

Markushevich A. Curvas maravillosas

Markushevich A. Numeros complejos

y representaciones conformes

Editorial MIR



Moscú